Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik
A. Filler

Sommersemester 2016

Übungsaufgaben zur Vorlesung **Analysis II** (Kombinationsbachelor-Studiengang)

Übungsserie 8

Abgabe am 20. 06. 2016

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:
- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem extra Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Montag/Mittwoch).
- Sie dürfen die Lösungen einzeln oder (maximal) zu zweit abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.

Aufgabe 8.1

(a) Leiten Sie eine Gleichung für den Mantelflächeninhalt des Rotationskörpers her, der durch Rotation des Graphen einer stetig differenzierbaren Funktion $f : [a;b] \to \mathbb{R}^+$ um die x-Achse entsteht. **5 Pkt.**

Unterteilen Sie dazu das Intervall $[a;b]$ in n äquidistante Teilintervalle und berechnen Sie die Mantelflächeninhalte der Kreiskegelstümpfe über den Teilintervallen, deren Grund- und Deckkreisradien die Funktionswerte von f an den entsprechenden Unterteilungspunkten sind. Addieren Sie die Mantelflächeninhalte der Kegelstümpfe und bestimmen Sie den Grenzwert der Summe für $n \to \infty$. Drücken Sie den Mantelflächeninhalt des Rotationskörpers als Integral aus.

Begründen Sie jeden Schritt Ihrer Herleitung. (Die Formel für den Mantelflächeninhalt eines Kreiskegelstumpfs dürfen Sie aber ohne Begründung einer Formelsammlung entnehmen.)

(b) In der Vorlesung wurde das Volumen des (unendlich ausgedehnten) Rotationskörpers berechnet, der durch Rotation des Graphen der Funktion $f\colon [\frac{1}{2};\infty] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$ um die x-Achse entsteht. Nun drehen wir ihn um 90° (so dass die Spitze nach unten zeigt) und füllen ihn mit Farbe. Reicht diese Farbe aus, um die Mantelfläche des Rotationskörpers bei sehr sparsamem Anstrich (pro Flächeneinheit werden nur 10^{-5} Volumeneinheiten Farbe benutzt) vollständig anzustreichen? **2 Pkt.**
Hinweis: Sie müssen das Integral in der unter (a) hergeleiteten Formel nicht exakt berechnen. Es reicht eine (begründete) Abschätzung, um die Frage zu beantworten.

Aufgabe 8.2

(a) Es seien $X := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $d(x,y) := \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ für $x, y \in X$. Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf X ist. **1 Pkt.**

(b) Es sei $X = \mathbb{C}$ und $p_0 \in X$ ein fester Punkt (wie Paris). Man zeige, dass durch

$$d(z,w) := \begin{cases} |z-w|\,, & \text{falls } z \text{ und } w \text{ auf einer Geraden durch } p_0 \text{ liegen,} \\ |z-p_0| + |w-p_0|\,, & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Metrik auf X definiert wird. **2 Pkt.**

(c) Gegeben ist eine Abbildung $\delta\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $\delta(x,y) = \arctan|x-y|$. Zeigen Sie, dass δ eine Metrik auf $\mathbb{R}$ ist. **5 Pkt.**

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}^+$ gilt: $\arctan(a+b) \leq \arctan(a) + \arctan(b)$. Verwenden Sie $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan x$.

Aufgabe 8.3

(a) Lösen Sie die folgende Differentialgleichung: $y'(x) = x^2\,y(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$. **2 Pkt.**

(b) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem: **3 Pkt.**

$$u'(x) = \frac{x}{3\sqrt{1+x^2}\,(u(x))^2} \qquad (x \in \mathbb{R},\ x > 0)\,, \qquad u(0) = 3$$

Insgesamt: **20 Pkt.**