Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik
A. Filler

Sommersemester 2016

Übungsaufgaben zur Vorlesung **Analysis II** (Kombinationsbachelor-Studiengang)

Übungsserie 9

Abgabe am 27. 06. 2016

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:
- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem extra Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Montag/Mittwoch).
- Sie dürfen die Lösungen einzeln oder (maximal) zu zweit abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.

Aufgabe 9.1

(a) Es sei (X, d) ein beliebiger metrischer Raum.
Zeigen Sie: Durch $e(x, y) := \min(1,\, d(x, y))$ wird eine Metrik auf X definiert. **2 Pkt.**

(b) Zeigen Sie, dass ein vollständiger metrischer Raum (X, d) auch bezüglich der Metrik e mit $e(x, y) = \min(1,\, d(x, y))$ vollständig ist. **3 Pkt.**

(c) Weisen Sie für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ und die Normen

$$\|x\|_1 := \sum_{j=1}^{n} |x_j|\,, \qquad \|x\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}\,, \qquad \|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

die Gültigkeit der Ungleichungen

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

nach. **4 Pkt.**

Hinweis: Benutzen Sie die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung im $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 9.2

(a) Wir betrachten den Vektorraum $C^0\big([0,1]\big)$ der über dem Intervall $[0,1]$ stetigen reellwertigen Funktionen und die für zwei beliebige Funktionen $f, g \in C^0\big([0,1]\big)$ folgendermaßen definierten Metriken d und e:

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\; dx\,, \qquad e(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} \{f(x) - g(x)\}\,.$$

Gegeben seien die folgendermaßen definierten Funktionen $f, g \in C^0\big([0,1]\big)$:

$$f(x) = 2 \qquad \text{und} \qquad g(x) = \begin{cases} -\frac{4x}{r} + 4, & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{r}{2}, \\ 2, & \text{falls } \frac{r}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

mit $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$.

Zeigen Sie, dass g bezüglich der Metrik d in der offenen Kugel um f mit Radius r liegt, nicht jedoch bezüglich der Metrik e.

Hinweis: Skizzieren Sie die Graphen. **4 Pkt.**

(b) Beweisen Sie: Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig. **3 Pkt.**

Aufgabe 9.3

(a) Es seien K und L kompakte Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass dann auch die Menge

$$K + L := \{x + y \mid x \in K,\, y \in L\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

kompakt ist. **4 Pkt.**

Insgesamt: **20 Pkt.**