Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik
A. Filler

Sommersemester 2016

Übungsaufgaben zur Vorlesung **Analysis II** (Kombinationsbachelor-Studiengang)

Übungsserie 10

Abgabe am 04.07.2016

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:
- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem extra Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Montag/Mittwoch).
- Sie dürfen die Lösungen einzeln oder (maximal) zu zweit abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.

Aufgabe 10.1

(a) Es seien (X, d) ein beliebiger metrischer Raum und $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Wir definieren zwei Funktionen $M, m\colon X \to \mathbb{R}$ durch

$$M(x) := \max\left(f(x), g(x)\right), \qquad m(x) := \min\left(f(x), g(x)\right)$$

(jeweils für alle $x \in X$). Zeigen Sie, dass die Funktionen $M, m\colon X \to \mathbb{R}$ stetig sind. **2 Pkt.**

(b) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{für } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ 0 & \text{für } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$

(b1) Ist f in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ stetig? Beweisen Sie Ihre Antwort. **2 Pkt.**

(b2) Bestimmen Sie die (ersten) partiellen Ableitungen von f in $\mathbb{R}^2 \setminus \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sowie in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sind die partiellen Ableitungen stetig? **3 Pkt.**

(c) Weisen Sie nach: Sind $f, g\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbare Funktionen, so gilt $\operatorname{grad}(f \cdot g) = f \cdot \operatorname{grad}(g) + g \cdot \operatorname{grad}(f)$. **1 Pkt.**

Aufgabe 10.2

Berechnen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$ **2 Pkt.**

(b) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \sin(x^2+y)\exp(xy)$ **3 Pkt.**

(c) $f\colon (\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^y = \exp(y \ln x)$ **2 Pkt.**

Hinweis: Benutzen Sie Ableitungsregeln in einer Variablen.

Aufgabe 10.3

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ 0 & \text{für } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$

Zeigen Sie:

(a) f ist in $\mathbb{R}^2$ stetig partiell differenzierbar. **3 Pkt.**

(b) f ist in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zweimal partiell differenzierbar, aber es gilt $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(0,0)$. **2 Pkt.**

Insgesamt: **20 Pkt.**