Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
A. Filler

Wintersemester 2012/13

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Übungsserie 7

Abgabe am 05. 12. 2012

Bitte lösen Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt. Geben Sie auf jedem Blatt gut lesbar Ihren *Namen*, die *Matrikelnummer* und Ihre *Übungsgruppe* (Namen des Übungsleiters) an.

Achten Sie auf *gut nachvollziehbare Darstellungen der Lösungs- bzw. Beweisschritte*. (Die reinen Lösungen von Aufgaben, bei denen LGS zu lösen sind, sind nicht ausreichend. Es muss erkennbar sein, wie die Lösungen ermittelt wurden.)

1. Entscheiden Sie für die folgenden Relationen, ob es sich um reflexive, irreflexive, symmetrische, asymmetrische, antisymmetrische sowie transitive Relationen handelt: 5 Pkt.

   (a) Teilbarkeit in $\mathbb{N}$
   (b) Gleichheit in $\mathbb{R}$
   (c) Ungleichheit in $\mathbb{R}$
   (d) Kleinerrelation in $\mathbb{R}$
   (e) Größer-Gleich-Relation in $\mathbb{R}$

   Geben Sie Ihre Antworten in Tabellenform an (siehe unten), Begründungen werden bei dieser Aufgabe nicht verlangt.

Relation	reflexiv	irreflexiv	symmetrisch	asymmetrisch	antisymmetr.	transitiv
...						

2. Beweisen Sie, dass die durch $(a;b) \sim (c;d) :\Leftrightarrow a\cdot d = c\cdot b$ definierte Relation (Quotientengleichheit) eine Äquivalenzrelation in der Menge $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ der Paare $(a;b)$ ganzer Zahlen (mit $b \neq 0$) ist. 6 Pkt.

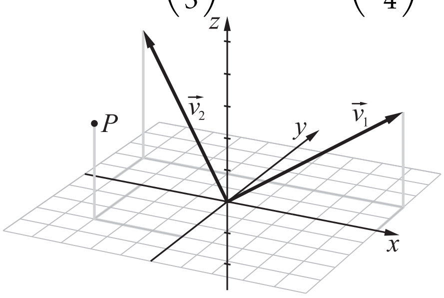
3. Die in der Aufgabe 2 festgelegte Äquivalenzrelation $\sim$ zerlegt die Menge $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ in Äquivalenzklassen $\overline{(a;b)} = \{(m;n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{0\} \mid (m;n) \sim (a;b)\}$. Für diese Äquivalenzklassen wird eine Addition $\oplus$ folgendermaßen definiert:
$$\overline{(a;b)} \oplus \overline{(c;d)} = \overline{(a\cdot d+c\cdot b\,;\, b\cdot d)}$$
   (Dabei sind $+$ und $\cdot$ die übliche Addition und Multiplikation ganzer Zahlen.)

   Weisen Sie nach, dass die so definierte Addition $\oplus$ repräsentantenunabhängig ist, dass also für $(a_1;b_1) \sim (a_2;b_2)$ und $(c_1;d_1) \sim (c_2;d_2)$ gilt: $(a_1\cdot d_1+c_1\cdot b_1\,;\, b_1\cdot d_1) \sim (a_2\cdot d_2+c_2\cdot b_2\,;\, b_2\cdot d_2)$. 4 Pkt.

   Hinweis: Falls Sie zunächst keinen Zugang zu der Aufgabe finden, rechnen Sie auf einem Schmierzettel Beispiele mit konkreten Zahlen und denken Sie über die Bruchrechnung nach.

4. (a) Gegeben ist eine Verschiebung $\vec{v}$ des Raumes durch einen Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP'}$ mit $P(1;2;3)$ und $P'(5;3;-1)$.
   i. Geben Sie den Verschiebungsvektor $\vec{v}$ als Zahlentripel an. 1 Pkt.
   ii. Geben Sie die Koordinaten der Bildpunkte der Punkte $A(3;-2;4)$ und $B(3{,}5;2{,}5;-5)$ bei der Verschiebung $\vec{v}$ an. 1 Pkt.

   (b) Durch $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ werden zwei Verschiebungen des Raumes beschrieben.



   i. Der Punkt $P(-3;-3;3)$ wird zunächst um $\vec{v}_1$ und dann um $\vec{v}_2$ verschoben. Geben Sie die Koordinaten der entstehenden Bildpunkte P' und P'' an. 2 Pkt.
   ii. Geben Sie den Verschiebungsvektor $\vec{v}$ an, der die Nacheinanderausführung der Verschiebungen $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ beschreibt. 1 Pkt.