Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
A. Filler

Wintersemester 2012/13

Übungsaufgaben zur Vorlesung

**Lineare Algebra und Analytische Geometrie I**

# Übungsserie 8

Abgabe am 12. 12. 2012

**Bitte lösen Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt. Geben Sie auf jedem Blatt gut lesbar Ihren *Namen*, die *Matrikelnummer* und Ihre *Übungsgruppe* (Namen des Übungsleiters) an.**

Achten Sie auf *gut nachvollziehbare Darstellungen der Lösungs- bzw. Beweisschritte.*

1. (a) Weisen Sie mithilfe der Vektorraumaxiome und der Folgerungen F1-F3 nach: Für jeden Vektor $\vec{u}$ ist der Gegenvektor $-\vec{u}$ eindeutig bestimmt. 2 Pkt.

   (b) Weisen Sie nach, dass in jedem Vektorraum $V$ für alle $\vec{u}, \vec{v} \in V$ und alle $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ gilt: Falls $\mu \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u}$ und $\vec{u} \neq \vec{o}$, so ist $\mu = \lambda$. 2 Pkt.

2. Weisen Sie für beliebige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (mit $\vec{a} \neq \vec{o}$, $\vec{b} \neq \vec{o}$) eines Vektorraumes $V$ nach:

   (a) Ist $\vec{a}$ kein Vielfaches von $\vec{b}$ (existiert also kein $r \in \mathbb{R}$ mit $\vec{a} = r\vec{b}$) und gilt $\vec{o} = \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b}$, so ist $\lambda = \mu = 0$. 2 Pkt.

   (b) Ist $\vec{a}$ kein Vielfaches von $\vec{b}$ und lässt sich ein Vektor $\vec{c}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen, so ist diese Darstellung eindeutig, d. h. aus $\vec{c} = \lambda_1\,\vec{a} + \mu_1\,\vec{b}$ und $\vec{c} = \lambda_2\,\vec{a} + \mu_2\,\vec{b}$ folgt $\lambda_1 = \lambda_2$ und $\mu_1 = \mu_2$. 2 Pkt.

3. (a) Für ein beliebiges (aber festes) $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge

$$P_n = \left\{ p \;\middle|\; p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k;\;\; a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R};\; x \in \mathbb{R} \right\}$$

   der Polynome höchstens $n$-ten Grades mit den durch

$$(p+q)(x) \;:=\; p(x) + q(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k + \sum_{k=0}^{n} b_k\, x^k \;=\; \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)\, x^k$$

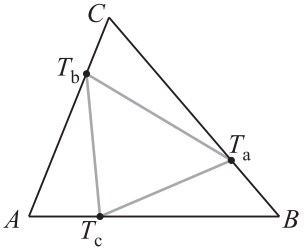
$$(\lambda \cdot p)(x) \;:=\; \lambda \cdot p(x) \;=\; \lambda \cdot \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k \;=\; \sum_{k=0}^{n} \lambda\, a_k\, x^k$$

   gegebenen Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ ein Vektorraum. (Dies müssen Sie nicht beweisen.)

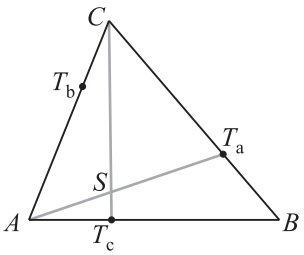
   Warum ist für $n \geq 1$ die Menge aller Polynome *genau* $n$-ten Grades *kein* Vektorraum? Geben Sie mindestens drei Stellen der Definition des Begriffs Vektorraum an, die hierbei verletzt würden. 2 Pkt.

   (b) Formulieren und beweisen Sie (mithilfe von Vektoren) die *Umkehrung* des Satzes: *In jedem Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander.* 3 Pkt.

4. Die Seiten eines Dreiecks $\Delta ABC$ werden durch drei Punkte $T_a$, $T_b$ und $T_c$ jeweils in demselben Verhältnis $1 : m$ $(m \in \mathbb{R}, m > 0)$ geteilt.




   (a) Zeigen Sie, dass der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des Dreiecks $\Delta T_a T_b T_c$ mit dem Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des Dreiecks $\Delta ABC$ identisch ist (und somit beide Dreiecke denselben Schwerpunkt besitzen). 3 Pkt.




   (b) Bestimmen Sie für $m = 2$ die Verhältnisse, in denen die Strecken $AT_a$ und $CT_c$ einander teilen.

   *Hinweis*: Nutzen Sie den Ansatz $\overrightarrow{AS} = \lambda\,\overrightarrow{AT_a}$, $\overrightarrow{CS} = \mu\,\overrightarrow{CT_c}$ und drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{AT_a}$ und $\overrightarrow{CT_c}$ als Linearkombinationen von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ aus. Mittels $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CS}$ erhalten Sie eine Darstellung für $\overrightarrow{AS}$, in der $\mu$ auftritt. Ermitteln Sie $\lambda$ und $\mu$ durch Koeffizientenvergleich (siehe Aufgabe 2b). 4 Pkt.