Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
A. Filler

Wintersemester 2012/13

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Übungsserie 9

Abgabe am 09. 01. 2013

Bitte lösen Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt. Geben Sie auf jedem Blatt gut lesbar Ihren *Namen*, die *Matrikelnummer* und Ihre *Übungsgruppe* (Namen des Übungsleiters) an.

Achten Sie auf *gut nachvollziehbare Darstellungen der Lösungs- bzw. Beweisschritte.*

1. Weisen Sie nach, dass die Menge aller 2×2-Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ ein Unterraum des Vektorraumes aller Matrizen $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ mit 2 Zeilen und 2 Spalten und mit den folgendermaßen definierten Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ ist: 3 Pkt.
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{m1} & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{1n} \\ b_{m1} & b_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}, \ \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{m1} & a_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda\, a_{11} & \lambda\, a_{1n} \\ \lambda\, a_{m1} & \lambda\, a_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ linear abhängig sind und überprüfen Sie, welche(r) der Vektoren sich als Linearkombination der jeweils drei anderen Vektoren darstellen lässt/lassen. 4 Pkt.

3. (a) Beweisen Sie: Sind M und N Mengen von Vektoren mit $M \subset N$ und ist M linear abhängig, so ist N ebenfalls linear abhängig. 4 Pkt.
   (b) Folgt aus der linearen Unabhängigkeit von zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ auch die lineare Unabhängigkeit von $\vec{u} - \vec{v}$ und $\vec{u} + \vec{v}$? Begründen Sie Ihre Antwort. 3 Pkt.

4. Gegeben sind die folgenden Unterräume von $\mathbb{R}^2$: 6 Pkt.
   $U_1 = \operatorname{span}\left(\binom{1}{2}\right), \ U_2 = \operatorname{span}\left(\binom{1}{1}, \binom{1}{-2}\right), \ U_3 = \operatorname{span}\left(\binom{1}{-3}\right).$
   Welche der folgenden Aussagen ist (sind) richtig?
   a) $\left\{\binom{-2}{-4}\right\}$ ist ein Erzeugendensystem von $U_1 \cap U_2$.
   b) $\left\{\binom{1}{4}\right\}$ ist eine linear unabhängige Teilmenge von U_2.
   c) Es gilt $\operatorname{span}(U_1 \cup U_3) = \mathbb{R}^2$.

   Begründen Sie Ihre Antworten.