Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
A. Filler

Wintersemester 2012/13

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Übungsserie 10

Abgabe am 16. 01. 2013

Bitte lösen Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt. Geben Sie auf jedem Blatt gut lesbar Ihren *Namen*, die *Matrikelnummer* und Ihre *Übungsgruppe* (Namen des Übungsleiters) an.

Achten Sie auf *gut nachvollziehbare Darstellungen der Lösungs- bzw. Beweisschritte.*

1. (a) Beweisen Sie den folgenden Satz: Ist eine Vektormenge $\{\vec{u}_1; \dots; \vec{u}_k\}$ linear unabhängig und ist ein Vektor $\vec{v}$ von $\{\vec{u}_1; \dots; \vec{u}_k\}$ linear unabhängig, so ist auch die Menge $\{\vec{u}_1; \dots; \vec{u}_k; \vec{v}\}$ linear unabhängig. 5 Pkt.

   (b) Es seien $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ beliebige Vektoren. Weisen Sie nach, dass $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{v} - \vec{w}$ und $\vec{w} - \vec{u}$ linear abhängig sind. 2 Pkt.

2. Zeigen Sie, dass $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist. 3 Pkt.

3. Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{x}$ bzgl. der Basis B: 2 Pkt.

   $\vec{x} = \begin{pmatrix} 19 \\ 5 \\ -17 \end{pmatrix}; \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}.$

4. (a) Geben Sie eine Basis des folgenden Unterraumes von $\mathbb{R}^4$ an: 3 Pkt.

   $$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0\,;\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

   (b) Zeigen Sie, dass 3 Vektoren der Form $\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ y^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{pmatrix}$

   mit $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, $x \neq z$, $y \neq z$ stets eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden. 5 Pkt.