Dr. Elke Warmuth
Dr. Bernhard Gerlach
Institut für Mathematik

Wintersemester 2005/06

Übungen zur Vorlesung
Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung (L)

6.1 (3+2 Punkte)
Gegeben sei eine Bernoulli-Kette der Länge n mit Erfolgswahrscheinlichkeit p, $0 < p < 1$ sowie eine Zahl α, $0 < \alpha < 1$.

a) Wie groß muss n sein, damit die Wahrscheinlickeit für mindestens einen Erfolg in der Bernoulli-Kette größer oder gleich $1 - \alpha$ ist.

b) Wie viele Ziehungen im Lotto „6 aus 49“ garantieren, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,75 die 13 unter den Gewinnzahlen ist?

6.2 (3 Punkte)
Ein Spielautomat ordnet die Zahlen 1, 2, 3 und 4 auf gut Glück an. Für jede Zahl an der richtigen Stelle (verglichen mit der natürlichen Reihenfolge) bekommt man 1 Euro.
Wie hoch muss der Einsatz sein, damit das Spiel fair ist?

6.3 (3+(2+1)) Punkte)
Man möchte eine große Anzahl von Tieren auf eine Krankheit untersuchen. Dazu werden den Tieren Blutproben entnommen. Die Untersuchung einer Blutprobe kostet c Euro. Folgenden zwei Methoden sollen verglichen werden:

Methode I: Die Proben werden für jedes Tier einzeln untersucht.

Methode II: Es werden Gruppen mit je m Tieren gebildet. Jede Probe wird geteilt. Jeweils eine Hälfte der Proben aller Tiere einer Gruppe wird zu einer Gruppenprobe zusammengefaßt, und mit einer einzigen Prüfung kann festgestellt werden, ob der Bestand der Gruppe gesund ist (Gruppenprobe ist negativ). Erst wenn die Gruppenprobe positiv ausfällt, wird mit der anderen Hälfte der Blutproben nach Methode I verfahren.

Die interessierende Krankheit tritt bei jedem Tier unabhängig von den anderen mit Wahrscheinlichkeit p $(0 < p < 1)$ auf.

a) Es sei X_m die Anzahl der Analysen für eine Gruppe bei Anwendung von Methode II. Berechnen Sie $E(X_m)$.

b) Untersuchen Sie für $m = 6, p = 0,3$ und $m = 6, p = 0,1$, welche der beiden Methoden **im Mittel** kostengünstiger ist. Kommentieren Sie Ihr Ergebnis.

6.4 (2+2 Punkte)

a) Ein Bernoulli-Experiment mit Erfolgswahrscheinlichkeit p wird so lange unabhängig ausgeführt, bis der r-te Erfolg auftritt. Es bezeichne X die Anzahl der Wiederholungen bis zum r-ten Erfolg einschließlich. Begründen Sie, dass

$$P(X = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r},\ n \geq r$$

gilt.

b) Die Verteilung einer Zufallsgröße Y ist gegeben durch

$$P(Y = k) = \binom{r+k-1}{r-1} p^r (1-p)^k,\ k \geq 0.$$

Geben Sie eine mögliche Interpretation der Zufallsgröße Y.