



Dr. Elke Warmuth  
Dr. Bernhard Gerlach  
Institut für Mathematik

Wintersemester 2005/06

## Übungen zur Vorlesung Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung (L)

### 7.1 (2+2+2 Punkte)

In einem Gefäß befinden sich 7 schwarze und 3 rote Kugeln. Man darf drei Kugeln mit einem Griff ziehen. Für jede rote Kugel bekommt man 1 Euro.

- Geben Sie die Verteilung des Gewinns an.
- Ein Griff in die Urne kostet 1 Euro. Ist das Spiel fair? Jemand spielt 10 mal dieses Spiel. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz seines Reingewinns nach 10 Spielen.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man bei 10 Spielen mindestens einmal 3 Euro gewinnt?

### 7.2 (2+(3+1+1)) Punkte)

Ein Teilchen bewegt sich auf den Punkten der  $x$ -Achse mit den Koordinaten  $0, \pm 1, \pm 2, \dots$  auf folgende Weise: jede Sekunde springt es um eine Einheit nach rechts oder links mit der Wahrscheinlichkeit  $p$  bzw.  $1 - p$ . Man sagt, es vollführe eine Irrfahrt auf  $\mathbb{Z}$ . Es startet im Ursprung zur Zeit 0.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es nach 11 Sekunden im Punkt +3 bzw. -4 ist?
- Die Zufallsgröße  $S_n$  gebe die Position des Teilchens nach  $n$  Sekunden an. Berechnen Sie den Erwartungswert von  $S_n$  und interpretieren Sie den erhaltenen Wert.  
Was passiert für  $n \rightarrow \infty$ ?

*Hinweis:* Stellen Sie  $S_n$  mit Hilfe einer binomialverteilten Zufallsgröße dar.

### 7.3 (1+1+1) Punkte)

Es seien  $(\Omega, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $A, B \subset \Omega$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Die Zufallsgröße  $X$  sei definiert durch  $X(\omega) = \alpha I_A(\omega) + \beta I_B(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$  mit  $I_C(\omega) = 1$  oder  $= 0$ , je nachdem, ob  $\omega \in C$  oder  $\omega \notin C$ .

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $X$  und berechnen Sie  $EX$  und  $\text{Var } X$ .

### 7.4 (3+1 Punkte)

Zwei Freunde A und B vereinbaren folgendes Spiel: A darf eine gute Münze werfen, sooft er will, jedoch höchstens viermal. Jedesmal, wenn „Zahl“ fällt, erhält er von B 1 Euro; jedesmal, wenn „Wappen“ fällt, muß er an B 1 Euro bezahlen.

Berechnen Sie für folgende Strategien den Erwartungswert und die Varianz des Nettogewinns für A.

- Höre auf, sobald das erste Mal Zahl gefallen ist.
- Höre auf, wenn das zweite Mal Zahl gefallen ist.
- Höre auf, wenn im 1. Wurf Zahl fällt, andernfalls, sobald das zweite Mal Zahl gefallen ist.

Welche Strategie würden Sie wählen? Warum?