Dr. Elke Warmuth
Institut für Mathematik

Sommersemester 2010

Übungen zur Vorlesung
Stochastik und ihre Didaktik (BA)
Thema: Erwartungswert, Varianz bzw. Kugel-Fächer-Modell

7.1 Immatrikulationsnummer endet auf 0, 1 oder 2

Die folgende Seite stammt aus dem Lehrbuch Stochastik, Elemente der Mathematik, Braunschweig: Schroedel, 2007, S. 82.

2.3.2 Erwartungswert einer Wahrscheinlichkeitsverteilung

Aufgabe 1 Ein Spielautomat ist so konstruiert, dass pro Spiel die nebenstehenden Beträge ausgeschüttet werden. Der Einsatz pro Spiel beträgt 0,50 €.
Welchen Gewinn kann man im Mittel pro Spiel erwarten? Bestimme dazu zunächst den Mittelwert des Gewinns in 100 Spielen.

Ausgezahlter Betrag (in €)	zugehörige Wahrscheinlichkeit
0	0,25
0,20	0,40
0,50	0,20
1,00	0,10
2,00	0,05

Lösung *1. Weg:*
Bei 100 Spielen kann man erwarten, dass ungefähr 25-mal 0 €, 40-mal 0,20 €, 20-mal 0,50 €, 10-mal 1,00 € und 5-mal 2,00 € ausgezahlt werden, insgesamt also ein Auszahlungsbetrag von ungefähr
$25 \cdot 0\,€ + 40 \cdot 0{,}20\,€ + 20 \cdot 0{,}50\,€ + 10 \cdot 1{,}00\,€ + 5 \cdot 2{,}00\,€$, also von 38 €.
In einem Spiel werden im Mittel pro Spiel 0,38 € ausgezahlt.
Da der Einsatz pro Spiel 0,50 € beträgt, hat man im Mittel einen Gewinn von $-0{,}12$ € pro Spiel, d. h. einen mittleren Verlust von 0,12 € pro Spiel.

2. Weg:
Analog zur Mittelwertbildung bei empirischen Häufigkeitsverteilungen kann die Berechnung des Mittelwerts pro Spiel auch mithilfe der Tabelle der Wahrscheinlichkeitsverteilung erfolgen. Dabei ist es gleich, ob wir den Spieleinsatz von 0,50 € zunächst unberücksichtigt lassen oder von vornherein beachten, d. h. wir können die Zufallsgröße

X: *Ausgezahlter Betrag in €* oder Y: *Gewinn in €* betrachten:

a	P(X = a)	a · P(X = a)
0	0,25	0
0,20	0,40	0,08
0,50	0,20	0,10
1,00	0,10	0,10
2,00	0,05	0,10
	Mittelwert	0,38

b	P(X = b)	b · P(X = b)
− 0,50	0,25	− 0,125
− 0,30	0,40	− 0,120
− 0	0,20	0
+ 0,50	0,10	+ 0,050
+ 1,50	0,05	+ 0,075
	Mittelwert	− 0,120

Im Mittel wird pro Spiel 0,38 € ausgezahlt, d. h. der mittlere Verlust beträgt 0,12 €.

Definition 3: *Erwartungswert einer Zufallsgröße*
Eine Zufallsgröße X nehme die Werte $a_1, a_2, \ldots, a_m$ mit den Wahrscheinlichkeiten $P(X = a_1), P(X = a_2), \ldots, P(X = a_m)$ an. Dann wird der zu erwartende Mittelwert $E(X)$ der Verteilung als *Erwartungswert der Zufallsgröße X* bezeichnet. Es gilt:
$$E(X) = a_1 \cdot P(X = a_1) + a_2 \cdot P(X = a_2) + \ldots + a_m \cdot P(X = a_m) = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot P(X = a_i)$$
Der Erwartungswert wird auch mit μ (lies: mü) bezeichnet.

Die Berechnung des Erwartungswerts einer Wahrscheinlichkeitsverteilung erfolgt am zweckmäßigsten mithilfe einer Tabelle – analog zur Berechnung des Mittelwerts einer empirischen Verteilung.

Analysieren Sie den Text unter (fach)didaktischen Gesichtspunkten kritisch und stellen Sie Ihren Vorschlag zur Einführung des Erwartungswertes einer Zufallsgröße vor. Legen Sie u.a. Wert auf die Unterscheidung von Beobachtungsebene und Modellebene.

7.2 Immatrikulationsnummer endet auf 3, 4 oder 5

Die folgenden Seiten stammen aus dem Lehrbuch Fokus Mathematik, Band 5, Berlin: Schroedel, 2008, S. 99–101. Das Thema „Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilung und Erwartungswert“ wird durch drei „Aufträge“ eingeführt, einer davon ist das „Wissensquiz“.

2 Das Wissensquiz

Der Sender „RTV 10“ möchte in Deutschland eine Konkurrenzsendung zu „Wer wird Millionär?“ ausstrahlen: das „Wissensquiz“.
Allerdings muss der Produzent noch überprüfen, ob die erwarteten Werbeeinnahmen ausreichen, um die Preisgelder zu finanzieren.
In den Ländern, in denen die Sendung bisher ausgestrahlt wurde, wurde gezählt, welche Gewinne die Kandidaten jeweils erzielt haben. Pro Sendung spielten durchschnittlich zwei Kandidaten.
Lassen sich die Preisgelder der Kandidaten finanzieren, wenn pro Sendung Werbeeinnahmen von 150 000 € dafür zur Verfügung stehen?

Gewinnstufe		Anteil der Kandidaten
1	1500 €	2,0 %
2	3000 €	3,0 %
3	5000 €	7,5 %
4	10 000 €	14,8 %
5	30 000 €	22,0 %
6	50 000 €	20,0 %
7	100 000 €	19,2 %
8	300 000 €	6,7 %
9	500 000 €	4,3 %
10	1 000 000 €	0,5 %

Nach Klärung des Begriffs Zufallsgröße und Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße folgt dieser Abschnitt:

BEACHTE
„$X = k$“ ist eine übliche Beschreibung für das Ereignis, dass die Zufallsgröße X den Wert k annimmt.
Den Begriff **Wahrscheinlichkeitsverteilung** hast du schon in Fokus 4 kennengelernt. Hier bezieht er sich auf die Zufallsgröße.

Wie viel Preisgelder sollte der Fernsehsender denn nun einkalkulieren?
Wenn du die Wahrscheinlichkeitsverteilung zugrunde legst, sollten von 1000 Kandidaten etwa 5 den Hauptpreis gewinnen, 43 Kandidaten sollten 500 000 € gewinnen, 67 sollten 300 000 € gewinnen, usw.
Die Preisgelder für diese 1000 Kandidaten summieren sich dann zu
1500 € · 20 + 3000 € · 30 + 5000 € · 75 + 10 000 € · 148 + 30 000 € · 220 + 50 000 € · 200 + 100 000 € · 192 + 300 000 € · 67 + 500 000 € · 43 + 1 000 000 € · 5 = 8 437 500 €
Jeder der Kandidaten gewinnt im Durchschnitt 8 437 500 € : 1000 = 8437,50 €
Dies ist der Wert, der als Gewinn pro Kandidat *erwartet* werden kann.
Statt des Ergebnisses können auch bereits die einzelnen Summanden durch 1000 dividiert werden, aus $\frac{20 \cdot 1500\,€}{1000}$ wird beim ersten Summanden durch Kürzen 1500 € · 0,02 bzw. 1500 € · 2 %.
Also kannst du jeden Wert der Zufallsgröße sofort mit der relativen Häufigkeit seines Auftretens multiplizieren:

$1500\,€ \cdot 2\% + 3000\,€ \cdot 3\% \cdot + 5000\,€ \cdot 7{,}5\% + 10\,000\,€ \cdot 14{,}8\% + 30\,000\,€ \cdot 22\% + 50\,000\,€ \cdot 20\% + 100\,000\,€ \cdot 19{,}2\% + 300\,000\,€ \cdot 6{,}7\% + 500\,000\,€ \cdot 4{,}3\% + 1\,000\,000\,€ \cdot 0{,}5\% = 84\,375\,€$

Definition

Nimmt die Zufallsgröße X die Werte x_1, x_2, x_3, …, x_n mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ an, so heißt $E(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \ldots + x_n \cdot p_n$ der Erwartungswert der Zufallsgröße X.

In unserem Fall ist $E(X) = 84\,375\,€$.
Wenn in jeder Sendung im Durchschnitt zwei Kandidaten spielen, sind Preisgelder von $2 \cdot 84\,375\,€ = 168\,750\,€$ zu erwarten. Also mehr als die 150 000 €, die aus den Werbeeinnahmen dafür vorgesehen waren.
Es müssen also bei jedem Kandidaten im Mittel noch 9375 € mehr ausgezahlt werden als für die Werbung eingenommen wird.
Die Situation lässt sich auch etwas anders betrachten. Wenn pro Sendung für die durchschnittlich zwei Kandidaten 150 000 € Preisgelder (also für jeden im Mittel 75 000 €) zur Verfügung stehen, macht der Sender $75\,000\,€ - 3000\,€ = 72\,000\,€$ Gewinn, wenn ein Kandidat nur die zweite Gewinnstufe erreicht. Der Sender macht dann Verlust, wenn ein Kandidat mehr als 75 000 € gewinnt.

Analysieren Sie den Text unter fachlichen und fachdidaktischen Gesichtspunkten kritisch.
Nutzen Sie die Vorlage „Wissensquiz“ zur Festigung der Begriffe Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung von Zufallsgrößen. Diskutieren Sie die Bedeutung des Erwartungswertes und seine „Beschränktheit“. Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen Varianz/Standardabweichung und Risiko her.
Lenken Sie Ihre Schülerinnen und Schüler in Richtung auf Wahrscheinlichkeitsaussagen über das Risiko des Senders. Verwenden Sie dabei die gegebene Häufigkeitsverteilung als Modell.

7.3 (schriftlich) Immatrikulationsnummer endet auf 6, 7, 8 oder 9

Dem Lehrbuch „H. K. Strick: Einführung in die Beurteilende Statistik“. Braunschweig: Schroedel, 2008, 2006, S. 57 ist folgende Aufgabe entnommen:

Aufgabe 2 – Kugel-Fächer-Modell

Vergleiche die folgenden Situationen; stelle die gemeinsame Struktur des zugrunde liegenden Zufallsversuchs heraus. Bestimme die gesuchten Wahrscheinlichkeiten.

(1) Beim Roulettespiel bleibt eine Kugel zufällig auf einem der 37 Felder mit den Nummern 0, 1, 2, ..., 36 liegen. Wir beobachten 50 Runden dieses Spiels.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Kugel auf einem bestimmten Feld, z.B. Feld Nr. 7, 0-mal, 1-mal, 2-mal, 3-mal, mehr als 3-mal liegen bleiben?

(2) Zu einer Serie von Sammelbildern gehören 37 Motive; jeweils ein Bild ist einer Kaugummipackung beigefügt. (Die Verteilung der Bilder auf die Kaugummipackungen erfolgt mit gleicher Häufigkeit und ist gut gemischt.) Wir kaufen 50 Kaugummipackungen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein bestimmtes Bild, z. B. Bild Nr. 7, 0-mal, 1-mal, 2-mal, 3-mal, mehr als 3-mal den 50 Packungen beigefügt sein?

(3) In einem Text von 37 Seiten sind insgesamt 50 Druckfehler enthalten; diese sind zufällig über den ganzen Text verteilt.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind auf einer bestimmten Seite, z.B. Seite 7 des Textes, 0, 1, 2, 3, mehr als 3 Druckfehler vorhanden?

a. Lösen Sie die Teilaufgaben (1) bis (3).

b. Welche Schwierigkeiten vermuten Sie bei Schülerinnen und Schülern, wenn sie diese Aufgaben lösen sollen? Warum legt der Autor in jeder Teilaufgabe solchen Wert auf das Adjektiv „bestimmt“? Welche abhängigen Zufallsgrößen sind in jeder Teilaufgabe versteckt?

c. Berechnen Sie für Teilaufgabe (1) den Erwartungswert der Anzahl der Felder, in denen die Kugel bei 50 Runden mehr als 2 mal liegenbleibt.

d. Es soll nun ein allgemeines Kugel-Fächer-Modell erarbeitet werden, das die drei Beispiele als Spezialfälle enthält. Welche Kompetenzen sind dabei angesprochen und wie würden Sie den entsprechenden Unterricht gestalten?