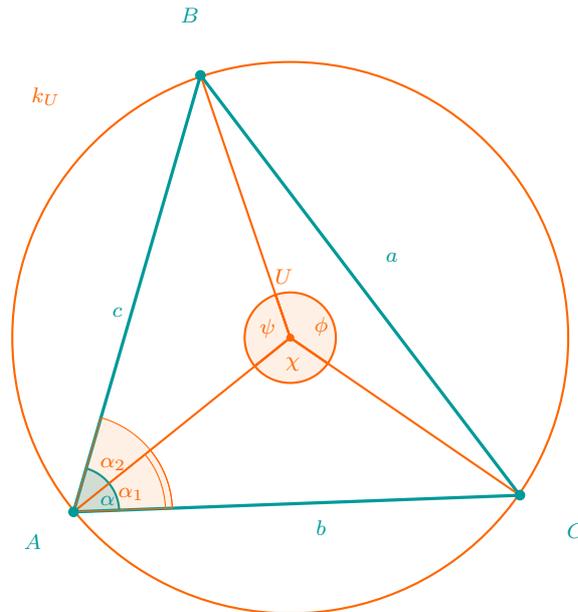


Satz 4. In einem stumpfwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ liegt der Umkreismittelpunkt U außerhalb des Dreiecks.

Beweis. Wir beweisen indirekt, also: Wenn U innerhalb von $\triangle ABC$ liegt, dann ist $\triangle ABC$ spitzwinklig.



Die drei Winkel ϕ , χ , ψ sind jeweils Innenwinkel eines Dreiecks und daher mit Sicherheit kleiner als 180° . Wir erhalten daher:

$$\chi + \psi > 180^\circ \quad (1)$$

Weil U Umkreismittelpunkt von $\triangle ABC$ ist, gilt $|\overline{AU}| = |\overline{CU}|$, das Dreieck $\triangle ACU$ ist also gleichschenkelig. Analog erfahren wir, dass $\triangle BAU$ gleichschenkelig ist und erhalten damit nach dem Innenwinkelsummensatz:

$$\alpha_1 = \frac{180^\circ - \chi}{2} = 90^\circ - \frac{\chi}{2} \quad (2)$$

$$\alpha_2 = \frac{180^\circ - \psi}{2} = 90^\circ - \frac{\psi}{2} \quad (3)$$

Und natürlich:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ \Leftrightarrow \alpha &= 180^\circ - \frac{\chi + \psi}{2} \end{aligned}$$

Womit zusammen mit Gleichung (1) natürlich folgt, dass $\alpha < 90^\circ$. Analog können wir schließen, dass auch

$$\begin{aligned} \beta &< 90^\circ \\ \gamma &< 90^\circ \end{aligned}$$

Das Dreieck $\triangle ABC$ ist also spitzwinklig. □