Vektoren im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II

Fanny Jeschek und Stefan Jedrzejak

24. November 2010

Gliederung

- Einführung
- Vektorbegriff
- Geraden- und Ebenengleichungen in $\mathbb{R}^3$
- Computer im Geometrieunterricht

Analytische Geometrie im Rahmenlehrplan

- ebene Flächen und Körper im räumlichen Koordinatensystem und in Schrägbilddarstellung auch aus Anwendungskontexten
- Abstände von Punkten im Raum
- Darstellungen von Geraden, Ebenen, Strecken, ebenen Flächen und Körpern im Raum mithilfe von Koordinaten und Vektoren
- Ebenengleichungen (Parameter-, Koordinaten-, und Normalenform)
- Addition und Vervielfachung von Vektoren (als vereinfachende Schreibweise und in anschaulicher Darstellung)
- relative Lage von Gerade und Gerade, Gerade und Ebene, Ebene und Ebene

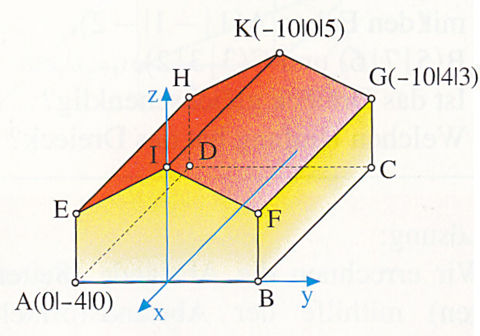
Leistungskurs - Erweiterung und Vernetzung

- lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit, Vektorraum, Basis und Dimension
- vektorielle Beschreibung von Kreisen in der Ebene und deren Lagebeziehungen zu Geraden
- Kugeln im Raum und deren Lagebeziehungen zu Geraden und Ebenen

Voraussetzungen

- Geometrische Objekte im 2- und 3-Dimensionalen
- Zeichnen eines 3-dimensionalen Koordinatensystems und 3-dimensionaler Objekte (Verkürzungsfaktor)
- Punkte und Objekte im 3-dimensionalen Koordinatensystem einordnen

Standardbeispiel



- Bestimmen von Koordinaten der übrigen Punkte
- Frage nach Streckenlängen
- Flächen- und Volumenberechnung

Aspekte des Vektorbegriffs

- Was ist ein Vektor?
- Wie wurde bei euch in der Schule der Vektorbegriff eingeführt?
- Welche geometrischen und arithmetischen Aspekte des Vektorbegriffs fallen euch ein?
- Partnerarbeit: Wie würdet ihr den Vektorbegriff einführen? Warum?

Was ist ein Vektor?

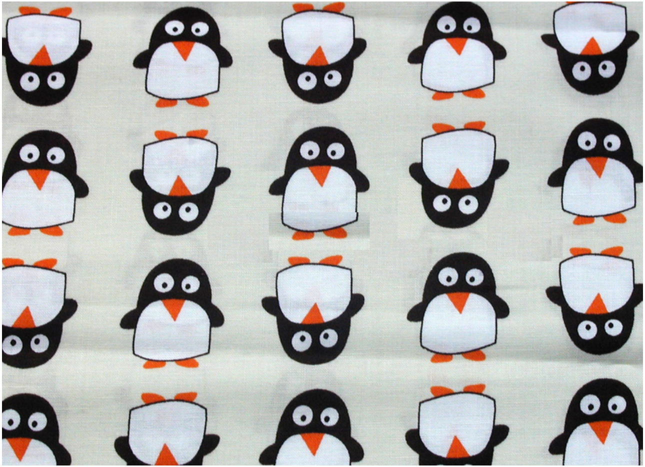
- arithmetisch: $n-$Tupel
- geometrisch: unendlich viele Pfeile
- gleiche Richtung, gleiche Länge
- ein Pfeil $=$ ein Repräsentant eines $n-$Tupels

Pfeilklassen

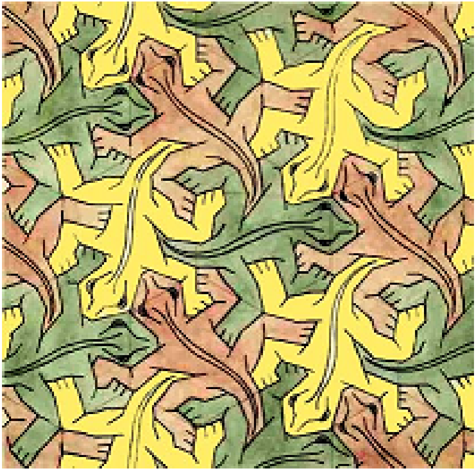
- geometrisch: Parallelverschiebung
- Segelboote im Wind: Richtung und zurückgelegte Strecke gleich
- Tapetenmuster, Ornamente

Parallelverschiebungen

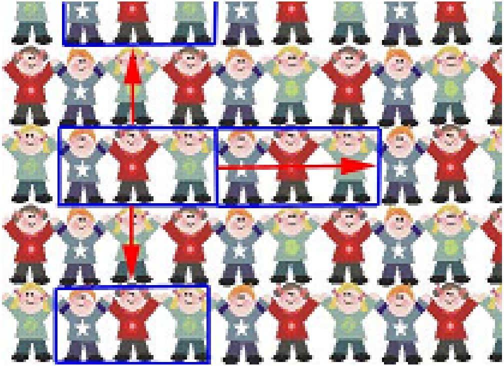
Parallelverschiebungen



Parallelverschiebungen



Parallelverschiebungen



Schreibweise

- Symbolische Darstellung durch Kleinbuchstaben mit Pfeil: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{u}, \vec{v}$
- Identifikation mit Anfangs- und Endpunkt *eines* Repräsentanten: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{PQ}$
- Darstellung als Spaltenvektor: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Geometrische Bedeutung

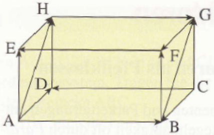
- Verschiebung entlang der Achsen
- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: x, y und $z =$ jeweiliger Verschiebungsanteil enlang der drei Achsen

- Identifikation eines Vektors $\overrightarrow{PQ}$ über seinen Anfangspunkt P und seinen Endpunkt Q erlaubt einfaches „Ablesen“ der Spaltenvektordarstellung
- Berechnen der Koordinatendifferenzen von Q und P
- Bsp.: $P = (5,3),\ Q = (1,7) \ \Rightarrow \ \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

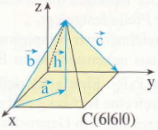
Übungsaufgaben

- Darstellung von Kanten geometrischer Objekte als Spaltenvektoren
- Berechnen von Spaltenvektoren aus zwei Punkten

Beispiele:



Der dargestellte Quader habe die Maße $6 \times 4 \times 3$. Der Koordinatenursprung liege im Punkt D. Die Koordinatenachsen seien parallel zu den Quaderkanten.
Stellen Sie die Vektoren als Spaltenvektoren dar.



Dargestellt ist eine regelmäßige Pyramide mit der Höhe 6. Stellen Sie die eingezeichneten Vektoren in Spaltenform dar.

Bestimmen Sie die Koordinaten von $\overrightarrow{PQ}$.

a) $P(2|1)$, $Q(6|4)$
b) $P(2|-3)$, $Q(-2|1)$
c) $P(1|2|-3)$, $Q(5|6|1)$
d) $P(-4|-3|5)$, $Q(2|3|-1)$
e) $P(3|4|7)$, $Q(2|6|2)$
f) $P(1|4|a)$, $Q(a|-3|2a+1)$

Eine dreiseitige Pyramide hat die Grundfläche ABC mit $A(1|-1|-2)$, $B(5|3|-2)$, $C(-1|6|-2)$ und die Spitze $S(2|3|4)$.

a) Zeichnen Sie die Pyramide.
b) Bestimmen Sie die Spaltenvektoren der Seitenkanten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und $\overline{AS}$.
c) M sei der Mittelpunkt der Kante $\overline{AB}$. Wie lautet der Vektor $\overrightarrow{AM}$?

Länge eines Vektors

- Zurückgreifen auf Bekanntes: Satz des Pythagoras
- Länge eines Vektors $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ gegeben durch: $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
- Bezeichnung: Betrag, Achtung: Übergeneralisierung!
- Schreibweise: $\left| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right|$

Mögliche Übungsaufgaben

- Bestimmen von Punkt D, wenn A, B und C gegeben sind und $\overrightarrow{AB}$ zum selben Vektor gehören soll wie $\overrightarrow{CD}$
- gegebener Vektor verschiebt P nach Q, jeweils P oder Q angegeben, der andere Punkt herauszufinden
- Übungen zur Bestimmung von Beträgen 2- und 3-dimensionaler Vektoren (vorwärts und rückwärts)

Addition

- zunächst arithmetisch, komponentenweise addieren
- geometrisch: „Anlegen“ eines Vektors an den anderen
- Wahl des Repräsentanten für ersten Vektor frei, für zweiten durch den ersten festgelegt
- Schülerinnen und Schüler kennen Verschiebungen und Verkettungen von Verschiebungen bereits aus der Sek I

Addition

- Kommutativgesetz: arithmetisch klar
- auch geometrisch anschaulich
- „Parallelogrammregel“
- Assoziativgesetz der Addition

Skalarmultiplikation

- arithmetisch: komponentenweise
- geometrisch anschaulich als Streckung bzw. Stauchung
- bereits bekannt aus Sek I
- Skalar mit negativem Vorzeichen zeigt Orientierungswechsel an

Skalarmultiplikation

- geometrisch wichtig: Parallelität von $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $s \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
- beide Distributivgesetze
- Übungen: Termvereinfachungen, Gleichungssysteme

Lineare Abhängigkeit

- heutige Schulbücher: Fokus auf Abhängigkeit, unterschieden nach 2- und 3-dimensional (*kollinear* und *komplanar*)
- Darstellbarkeit von Vektoren durch Linearkombinationen von anderen
- Übungen: Prüfen von Vektorpaaren und -drillingen auf Kollinearität, Komplanarität

Einführung der Geradengleichung

- Was ist ein Ortsvektor?
- Welche Funktion hat er?
- Welche Schwierigkeiten könnten auftreten? Wie kann man sie lösen?

Ortsvektor

- Vektor = Pfeilklasse, also Ortsvektor unendlich viele Pfeile
- für Positionierung von Geraden und Ebenen wird *ein* Repräsentant gewählt
- Repräsentant = Pfeil vom Ursprung zum Punkt mit Koordinaten des Vektors
- Verständnisproblemen vorbeugen mit Betonung auf arithmetischem Aspekt

Affiner Raum

- Ortsvektor verbindet Pfeilklassen mit Punkten
- Affiner Raum: Möglichkeit der Darstellung von Punkten, Geraden und Ebenen
- Skript von Herrn Grassmann, LAAG I – S. 57ff, II – S. 54

Affiner Raum

Sei A eine Menge, V ein Vektorraum. Das Paar (A, V) heißt **affiner Raum**, wenn eine Operation $+ : A \times V \to A$ gegeben ist, die dem Paar (P, v) mit $P \in A, v \in V$ das Element $P + v$ so zuordnet, dass

1. $(P + v) + w = P + (v + w)\ \forall P \in A, v, w \in V$ gilt und
2. zu beliebigen $P, Q \in A$ ein eindeutig bestimmter Vektor v existiert, sodass $Q = P + v$ ist. Dieser Vektor heißt **Verbindungsvektor** von P und Q und wird mit $\overrightarrow{PQ}$ bezeichnet.

Einführung der Geradengleichung

- Gerade durch Position und Richtung vollständig bestimmt
- Betonung des Gleichungsaspekts
- Einsetzen liefert Punkte der Geraden

Aufgabeninseln

- Parameterform Geraden- und Ebenengleichungen
- Berechnen von Schnittgebilden durch LGS
- Normalenvektoren, Abstandsbestimmungen (Punkt-Gerade, Punkt-Ebene, Gerade-Gerade)
- Aufgabenbereiche auf wenige Musteraufgaben zurückführbar $\rightarrow$ halb-algorithmischer Charakter

Einführung der Geradengleichung

- Internationaler Vergleich (TIMSS): deutsche Schüler/innen weisen Defizite auf
- Forderung: angemessenes Gleichgewicht zwischen Routine und Problemorientiertheit
- Lösungsstrategien: „Öffnen“ von Aufgaben, „sinnlose“ Zusatzinformationen

Diskussion

Diskussion

- Ist die Einbettung in Vektorräume in der Schule sinnvoll?

Diskussion

- Ist die Einbettung in Vektorräume in der Schule sinnvoll?
- Kann man auf Vektoren im Unterricht ganz verzichten und welche anderen Möglichkeiten gibt es?

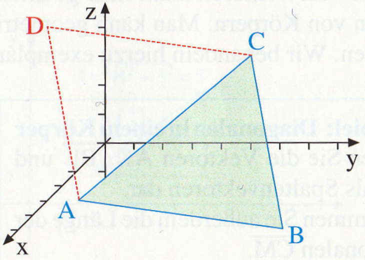
Nutzen der Vektorrechnung

Beispiel: Dreieck / Parallelogramm

Gegeben ist das Dreieck ABC mit den Eckpunkten $A(6|2|1)$, $B(4|8|-2)$ und $C(0|5|3)$ (siehe Abb.).

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck gleichschenklig ist, aber nicht gleichseitig.

b) Der Punkt D ergänzt das Dreieck zu einem Parallelogramm. Bestimmen Sie die Koordinaten von D.



Nutzen der Vektorrechnung

- Vektoren oft einfacher zu handhaben
- Weniger umständliches Lösen von Aufgaben möglich

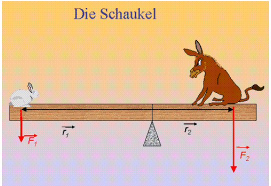
Praxisnutzen

Praxisnutzen

- Statik, Mechanik
- Physik – den Schülerinnen und Schülern bereits bekannt:

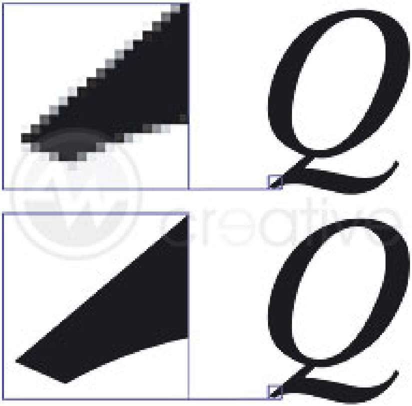
Praxisnutzen

- Statik, Mechanik
- Physik – den Schülerinnen und Schülern bereits bekannt: Geschwindigkeit, Kraft



Praxisnutzen

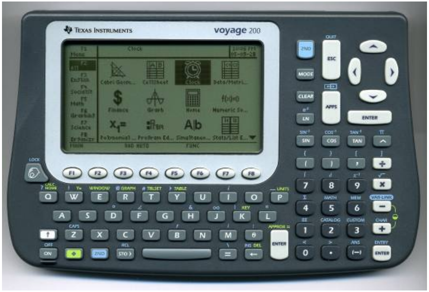
- Computergraphik: Pixelgraphik vs. Vektorgraphik (glatter, sauberer $\rightarrow$ qualitativ hochwertiger)
- Computerspiele: Projektion von Computer-3-D-Graphik auf 2-D-Bildschirm beruht auf Vektorgeometrie



- Pixelgrafik: Paint, Adobe Photoshop, Corel Draw
- Vektorgrafik: Adobe Illustrator

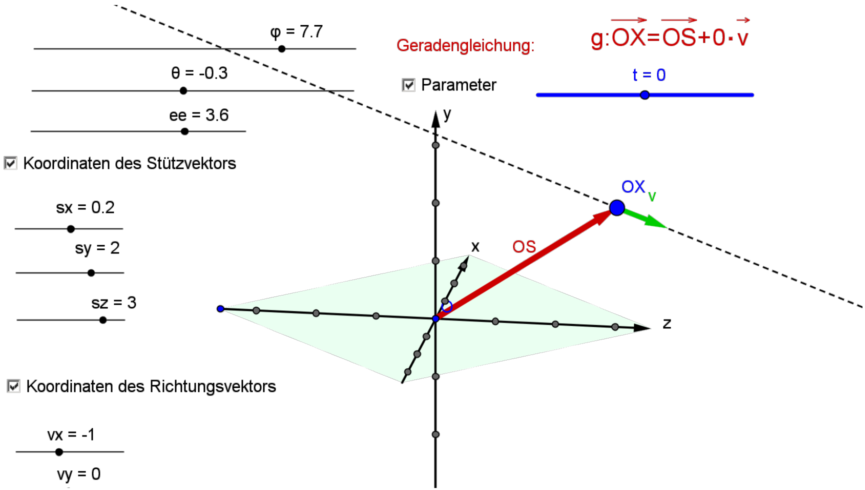
CAS, DGS, POV-Ray

- TI Voyage 200
- GeoGebra
- POV-Ray



GeoGebra

- mächtiges Werkzeug für den Geometrieunterricht in 2D
- Bedienbarkeit durch Schüler
- Visualisierung geometrischer Sachverhalte in 2D und 3D
- 3D eingeschränkt


φ = 7.7
θ = -0.3
ee = 3.6
Koordinaten des Stützvektors
sx = 0.2
sy = 2
sz = 3
Koordinaten des Richtungsvektors
vx = -1
vy = 0
Geradengleichung:
g: $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OS}+0\cdot\vec{v}$
Parameter
t = 0
y
x
z
OS
OX
v

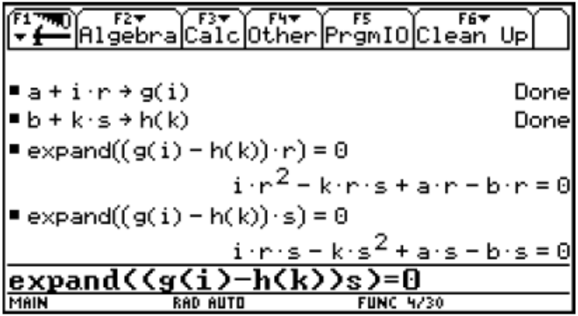
Einführung der Ebenengleichung

Aufgabe: Bildet Gruppen und überlegt, wie ihr die Ebenengleichung in der Schule einführen würdet. Geht dabei auf die folgenden Aspekte ein:

- Richtungsvektoren
- Stützvektor
- Parameter
- kollineare Richtungsvektoren

TI Voyage 200

- Computeralgebrasystem von Texas Instruments
- Graphen zeichnen
- Gleichungen lösen
- Integralrechnung und Differentialrechnung
- DGS integriert



Aufgabe

Bestimmen Sie den Abstand zwischen der Geraden g und dem Punkt P!

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie den Abstand von g und P!

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Partnerarbeit: Versucht die Aufgabe auf mehrere Arten zu lösen.
Tragt dazu die Lösungsidee auf eine Folie auf.
Hinweis: Eine geometrische Lösung ist nicht notwendig.

Bestimmen Sie den Abstand von g und P!

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; P = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Partnerarbeit: Versucht die Aufgabe auf mehrere Arten zu lösen.
Tragt dazu die Lösungsidee auf eine Folie auf.
Hinweis: Eine geometrische Lösung ist nicht notwendig.

Lösungsplan(Analytische Geometrie):

- Lotfußpunktverfahren

Bestimmen Sie den Abstand von g und P!

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Partnerarbeit: Versucht die Aufgabe auf mehrere Arten zu lösen.
Tragt dazu die Lösungsidee auf eine Folie auf.
Hinweis: Eine geometrische Lösung ist nicht notwendig.

Lösungsplan(Analytische Geometrie):

- Lotfußpunktverfahren

Lösungsplan(Analysis):

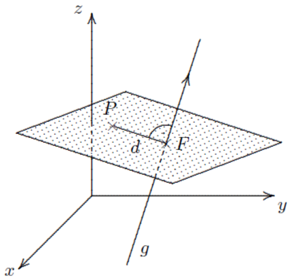
- Abstandsfunktion bestimmen und Minimum berechnen

Lösung mit analytischer Geometrie

Wir legen zunächst eine Ebene durch P, die senkrecht auf g steht. Als Stützvektor nehmen wir $\vec{OP}$, als Normalenvektor den Richtungsvektor der Geraden g.

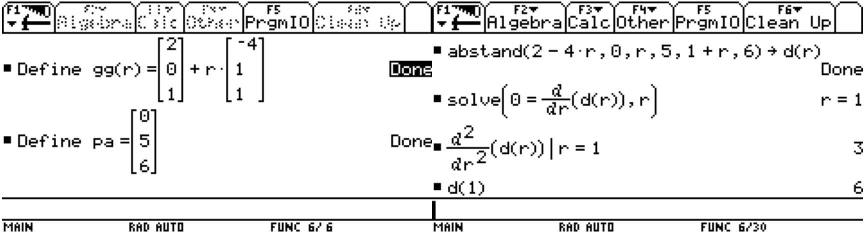
Dann berechnen wir den Schnittpunkt F dieser Ebene mit g.

Der gesuchte Abstand d wird dann mit $d = \left|\vec{FP}\right|$ bestimmt.



Lösung mit Analysis

Wir bestimmen die Funktion, die den Abstand von P und g in Abhängigkeit von r beschreibt und bestimmen das Minimum.



POV-Ray

- vielseitiges Werkzeug in 3D
- Bedienbarkeit durch Lehrer
- Visualisierung komplizierter geometrischer Sachverhalte
- Videoerstellung

Geschlechterspezifische Differenzierung

- Muss man bei der Frage, inwieweit Computereinsatz im Geometrieunterricht sinnvoll ist, zwischen Männern und Frauen unterscheiden?
- Umfrage: Wie gut ist das räumliche Vorstellungsvermögen dieses Kurses?

Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit und Mitarbeit!