

Aufgaben zum Zirkel am 22.1.2015

1. A Useful Equation

(a) Prove the identity of the French mathematician Sophie Germain (1776–1831):

$$a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$$

(b) Is $9^2 + 50^2$ a prime number?

(Part (a) helps to answer this without long calculations or using a calculator.)

2. Gleichungen die Zweite

Finde die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen:

(a) $\frac{3x - 1}{4} + \frac{5 - 4x}{6} = \frac{x - 3}{2}$

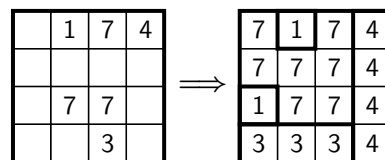
(b) $\frac{x + 6}{2} - \frac{8x + 5}{6} = \frac{8 - x}{2} - \frac{x - 1}{3}$

(c) $(2x - 1)^2 - (x + 2)(x - 2) = (3x + 1)(x - 1) + 2(3 - x)$

3. Fillomino

In jedes Feld soll eine Zahl geschrieben werden, so dass sich Gebiete mit gleichen Zahlen ergeben. Die Zahlen in einem Gebiet geben an, aus wie vielen Feldern das Gebiet besteht. Gebiete gleicher Größe dürfen sich waagrecht oder senkrecht nicht berühren. Zwei vorgegebene Zahlen dürfen durchaus zum selben Gebiet gehören. Es kann auch Gebiete geben, die keine vorgegebene Zahl enthalten.

Beispiel



3			5	
	1			2
	4		2	
4			3	
	4			4

3				5
	3		1	
1		3		2
	5		3	
5		1		

4. Girls, girls, girls

My gerbil Lilly is between 50 and 70 weeks old. A while ago she had babies, all girls. I gave them away to friends and now Lilly's daughters have babies themselves. Again they are all girls. The interesting thing is: Each of Lilly's daughters has as many daughters as sisters. And the number of Lilly's daughters and granddaughters together is exactly the age of Lilly.

How old is Lilly and how many daughters and granddaughters does she have?

5. Plus, Minus, Zero

Prove that for all rational numbers a and b the following equation is always true:

$$(a + b)(a - b) + (b + a)(b - a) = 0$$

Now we change the $+$ to a $-$ and get the equation:

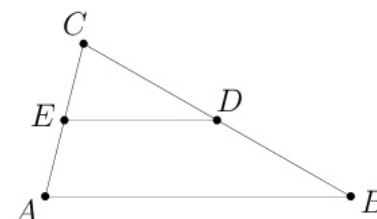
$$(a + b)(a - b) - (b + a)(b - a) = 0$$

For which rational numbers a and b is this equation true?

Zum Überlegen für daheim:

1. Ungerecht geteilt – und wieder hergestellt

In einem Dreieck $\triangle ABC$ wird die Mittenparallele zur Seite \overline{AB} eingezeichnet. Wie lässt sich aus mehreren 1:1-Kopien des entstehenden Dreiecks $\triangle EDC$ das ursprüngliche Dreieck rekonstruieren?



2. Mrs. Miller's Children

On Mrs. Miller's 40th birthday her 3 children Phil, Megan and Jonathan discovered that the sum of their ages is the same as their mother's age. The oldest, Jonathan, is twice as old as Phil, who is the youngest. However, 8 years ago, the 3 children were together only half as old as their mother. How old is each child?