

## Aufgaben zum Zirkel am 30.4.2015

### 1. Multiple Choice!

$N$  ist eine zweistellige natürliche Zahl. Wenn du die beiden Ziffern von  $N$  vertauschst, erhältst du die ebenfalls zweistellige natürliche Zahl  $M$ , wobei  $N$  größer als  $M$  sein soll. Bilde die Differenz von  $N$  und  $M$ . Welche der folgenden Aussagen trifft dann immer zu?

- (a)  $N - M$  ist eine gerade Zahl.
- (b)  $N - M$  ist eine ungerade Zahl.
- (c)  $N - M$  ist immer durch neun teilbar.

### 2. Induktion

Beweise mit Hilfe von vollständiger Induktion:

- (a) Eine Summenformel für die ersten  $n$  Quadratzahlen: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist

$$\sum_{k=0}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$$

- (b) Ein Färbungssatz: Ein beliebiges  $n$ -Eck sei trianguliert, das heißt, vollständig und überschneidungsfrei in Dreiecke unterteilt. Zeige, dass man die Ecken des  $n$ -Ecks so mit drei Farben färben kann, dass die Ecken jedes Dreiecks mit allen drei Farben gefärbt sind.
- (c) Für welche Zahlen gilt  $n! \geq 2^n$ ? Beweise deine Vermutung per vollständiger Induktion, indem du den Induktionsanfang von  $n = 0$  auf eine passende Zahl verschiebst.

### 3. Bist du noch ganz fit?!

Löse die folgenden Gleichungen (und denk daran, eine kurze Probe zu machen):

(a)  $\frac{x}{5} = \frac{126 - x}{2}$

(b)  $\frac{3x - 1}{5} - \frac{13 - x}{2} = \frac{7x}{3} - \frac{11(x + 3)}{6}$

(c)  $\frac{10}{4x - 4} - \frac{5}{2x + 2} = 0$

(d)  $\frac{7x + 3}{x^2 - 1} - \frac{3}{x - 1} = \frac{5}{x + 1}$

(e)  $4x^2 + 12x + 9 = x^2 - 2x + 1$

(f)  $\sqrt{x + 3} + 3 = 5$

(g)  $\sqrt{x + 3} + 7 = 5$

(h)  $|x + 7| = 10 - x$

(i)  $|17x - 6| + 2x - 6 = 12x - 4 + |6 - 17x|$

(j)  $|x + 2| + |x - 2| = x + 2$

#### 4. Leckereienhüpferei

Ein kräftiger Widlopf springt auf einer Wiese herum und sucht nach Leckereien. Dazu geht er ganz systematisch vor. Beginnend bei seinem Lieblingsbaum springt er einen Meter nach Norden, Osten, Süden oder Westen, wie es ihm gerade in den Sinn kommt, und schaut sich an der Stelle, wo er landet, nach Leckerbissen um. Findet er nichts, hüpfert er wieder einen Meter nach Norden, Osten, Süden oder Westen und schaut sich an der Stelle, wo er landet, nach Leckerbissen um. Das tut er so lange, bis er eine Leckerei findet. Da auf der Wiese jede Menge leckeres Futter wächst, braucht der Widlopf höchstens 10 Sprünge, bis er etwas zu fressen findet. Und nach dem Essen fällt er in alter Widlopfmanier auf der Stelle in einen tiefen Verdauungsschlaf.

Wie viele Punkte auf der Wiese sind mögliche Schlafstellen des Widlopfes?

#### Zum Überlegen für Daheim:

##### 1. Noch mehr Induktionsbeweise

- (a) Beweise die Ungleichung von Bernoulli: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und jede rationale Zahl  $x > -1$  gilt

$$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

- (b) Für welche natürlichen Zahlen gilt  $2^n > n^2$ ? Formuliere und beweise deine Vermutung.

##### 2. Der Hund macht's!

Zwei Mathematiker treffen sich zufällig im Flugzeug: „Hattest du nicht drei Söhne?“, fragt der eine, „wie alt sind die denn jetzt?“ „Das Produkt der Jahre ist 36“, lautet die Antwort, „und die Summe der Jahre ist genau das heutige Datum“. „Hmm, das reicht mir noch nicht“, meint darauf der Kollege. „Oh ja, stimmt“, sagt der zweite Mathematiker, „ich habe ganz vergessen zu erwähnen, dass mein ältester Sohn einen Hund hat“. „Dann ist ja alles klar!“ entgegnet der andere.

Wie alt sind die drei Söhne?