Aufgaben zum Zirkel am 7. Mai 2015

1. **Beweise dich (wenn's geht, per Induktion)!**
   (a) Zeige: Wird ein Erdteil durch eine gewisse Anzahl von Kreisen in Länder eingeteilt, so kann man diese Karte mit zwei Farben zulässig färben.
   (b) Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl
   $$7^n - 1$$
   ein Vielfaches von 6 ist.

2. **Murmelmurmel**
   Wie viele Murmeln brauche ich mindestens, wenn ich diese so auf 7 Säcke verteilen will, dass in keinem Sack gleich viele Murmeln sind?

3. **Bist du noch ganz fit?!**
   Löse die folgenden Gleichungen (und denk daran, eine kurze Probe zu machen):
   (a) $\dfrac{x}{5} = \dfrac{126 - x}{2}$
   (b) $\dfrac{3x-1}{5} - \dfrac{13-x}{2} = \dfrac{7x}{3} - \dfrac{11(x+3)}{6}$
   (c) $\dfrac{10}{4x-4} - \dfrac{5}{2x+2} = 0$
   (d) $\dfrac{7x+3}{x^2-1} - \dfrac{3}{x-1} = \dfrac{5}{x+1}$
   (e) $4x^2 + 12x + 9 = x^2 - 2x + 1$
   (f) $\sqrt{x+3} + 3 = 5$
   (g) $\sqrt{x+3} + 7 = 5$
   (h) $|x+7| = 10 - x$
   (i) $|17x - 6| + 2x - 6 = 12x - 4 + |6 - 17x|$
   (j) $|x+2| + |x-2| = x + 2$

4. **Leckereienhüpferei**

   Ein kräftiger Widlopf springt auf einer Wiese herum und sucht nach Leckereien. Dazu geht er ganz systematisch vor. Beginnend bei seinem Lieblingsbaum springt er einen Meter nach Norden, Osten, Süden oder Westen, wie es ihm gerade in den Sinn kommt, und schaut sich an der Stelle, wo er landet, nach Leckerbissen um. Findet er nichts, hüpft er wieder einen Meter nach Norden, Osten, Süden oder Westen und schaut sich an der Stelle, wo er landet, nach Leckerbissen um. Das tut er so lange, bis er eine Leckerei findet. Da auf der Wiese jede Menge leckeres Futter wächst, braucht der Widlopf höchstens 10 Sprünge, bis er etwas zu fressen findet. Und nach dem Essen fällt er in alter Widlopfmanier auf der Stelle in einen tiefen Verdauungsschlaf.

   Wie viele Punkte auf der Wiese sind mögliche Schlafstellen des Widlopfs?

Zum Überlegen für Daheim:

1. **Der Turm von Hanoi**

   (a) Ein bekanntes mathematisches Spiel ist der „Turm von Hanoi“: Auf einem von drei Stäben sitzen n Scheiben, die kleinste oben, dann die zweitkleinste als zweitoberste und so weiter, die größte unten. Die Aufgabe besteht darin, alle diese Scheiben auf einen der anderen Stäbe zu bringen, wobei folgende Regeln zu beachten sind:

   - In jedem Schritt darf nur eine Scheibe bewegt werden.
   - Nie darf eine größere Scheibe auf einer kleineren liegen.

   Zeige mit vollständiger Induktion, dass diese Aufgabe mit $2^n - 1$ Schritten lösbar ist. Beweise dazu zunächst, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Formel

   $$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

   gilt.

   (b) Es geht die Legende, dass die Mönche eines buddhistischen Klosters das Spiel „Turm von Hanoi“ mit $n = 64$ Scheiben aus echtem Gold spielen... und solange sie damit beschäftigt sind, geht die Welt nicht unter.
   Angenommen, die Mönche brauchen für jeden Zug eine Sekunde. Wie viele Jahre brauchen sie mit der Lösung aus (a), bis sie fertig sind?

Nächste Woche ist Himmelfahrt, und der Zirkel fällt dann leider aus.
Übernächste Woche geht es normal weiter!