

Aufgaben zum Zirkel am 21. Mai 2015

1. Was man nicht alles mit Induktion beweisen kann...

„In einer Gruppe von Tieren, in der mindestens ein Elefant ist,
sind alle Tiere Elefanten.“

Beweis per vollständiger Induktion über die Anzahl n der Tiere.

Induktionsanfang: $n = 1$. In diesem Fall besteht die Gruppe aus nur einem Tier und enthält einen Elefanten, folglich ist das eine Tier ein Elefant und die Behauptung stimmt.

Induktionsschritt: $n \rightsquigarrow n + 1$. Angenommen, wir haben die Behauptung bereits für jede Gruppe aus n Tieren bewiesen. Wir zeigen, dass die Behauptung dann auch für jede Gruppe aus $n + 1$ Tieren stimmt. Sei also eine Gruppe aus $n + 1$ Tieren gegeben, in der mindestens ein Tier ein Elefant ist. Nun nehmen wir ein Tier (nicht den Elefanten) aus der Gruppe heraus. Die verbleibende Gruppe besteht aus n Tieren und enthält einen Elefanten, nach Induktionsvoraussetzung sind es also nur Elefanten. Jetzt tun wir das vorher weggenommene Tier wieder hinzu und entfernen dafür ein anderes. Wieder erhalten wir eine Gruppe von n Tieren, in der mindestens ein Tier ein Elefant ist, also sind auch hier alle Tiere Elefanten. Insgesamt sind also alle Tiere Elefanten.

Was ist hier los?

2. Neue Ungleichungen

Finde die Menge aller Lösungen der folgenden Ungleichungen:

(a) $2 - \frac{6-x}{3} > \frac{3}{x}$

(b) $\frac{\sqrt{2} \cdot x}{\sqrt{3}} + \sqrt{6} \leq \sqrt{24}$

3. Ein Zusammenhang zwischen Quadrat und Kubik

Zeige, dass man die Summe der ersten n Kubikzahlen berechnen kann, indem man sie Summe der ersten n natürlichen Zahlen quadriert, dass also gilt:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$$

4. Kannst du helfen?

Erich Bischoff, ein deutscher Orientalist, Germanist, Religionsforscher, Autor und Übersetzer, der sich auch mit der jüdischen Zahlenmystik der *Kaballa* auseinandergesetzt hat, schreibt 1920: „Ich wenigstens kenne keine vollbefriedigende Erklärung dafür, warum jede ungerade Zahl (von 3 ab), mit sich selbst multipliziert, stets ein Vielfaches von 8 mit 1 als Rest ergibt.“

Wie sieht es mit dir aus? Findest du dafür eine vollbefriedigende Erklärung?

5. Leckereienhüpferei

Ein kräftiger Widlopf springt auf einer Wiese herum und sucht nach Leckereien. Dazu geht er ganz systematisch vor. Beginnend bei seinem Lieblingsbaum springt er einen Meter nach Norden, Osten, Süden oder Westen, wie es ihm gerade in den Sinn kommt, und schaut sich an der Stelle, wo er landet, nach Leckerbissen um. Findet er nichts, hüpfert er wieder einen Meter nach Norden, Osten, Süden oder Westen und schaut sich an der Stelle, wo er landet, nach Leckerbissen um. Das tut er so lange, bis er eine Leckerei findet. Da auf der Wiese jede Menge leckeres Futter wächst, braucht der Widlopf höchstens 10 Sprünge, bis er etwas zu fressen findet. Und nach dem Essen fällt er in alter Widlopfmanier auf der Stelle in einen tiefen Verdauungsschlaf.

Wie viele Punkte auf der Wiese sind mögliche Schlafstellen des Widlopfes?

Zum Weiterdenken:

1. Die magischen Sonnenblumen

Brunhilda liebt ihre magischen Sonnenblumen, sie machen jeden Tag nur noch schöner. Gerade blühen im Garten 99 dieser Sonnenblumen, und wie immer schneidet Brunhilda heute einen Strauß für Ihre magische Vase ab. Die magischen Sonnenblumen können nur mit der magischen Schere geschnitten werden, die immer ganz genau 7, 21, 12 oder 19 Blüten auf einmal schneiden kann. Immer wenn 7 Sonnenblumen abgeschnitten werden, wachsen 15 neue Blüten nach, wenn 21 abgeschnitten werden, wachsen 17 neue nach, wenn 12 abgeschnitten werden, wachsen 32 neue nach und wenn 19 abgeschnitten werden, wachsen 3 neue Sonnenblumen nach.

Brunhilda behütet die magische Schere wie ihren Augapfel. Denn wenn es geschieht, dass alle Sonnenblumen abgeschnitten sind, wachsen keine neue nach und die Pracht ist dahin. Ist Brunhildas Angst berechtigt?

2. Wurzelwerk

Welchen Wert hat das Quadrat der 3. Potenz der dritten Wurzel eines Achtels der Quadratwurzel der 4. Potenz der Quadratwurzel von 2?