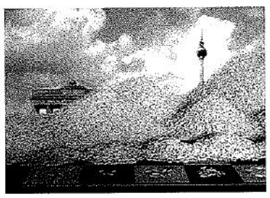
Aufgaben zum Zirkel am 11. Juni 2015

1. Viele, viele Reiskörner und die geometrische Reihe



Auf der Ausstellung „mathema“ in Berlin wurde die Anzahl der Reiskörner auf dem 51. Feld in einer Montage vor dem Funkturm veranschaulicht

Das Märchen vom Reiskorn und dem Schachbrett

Im alten Persien erzählten sich die Menschen einst dieses Märchen: Es war einmal ein kluger Höfling, der seinem König ein kostbares Schachbrett schenkte. Der König war über den Zeitvertreib sehr dankbar und sprach er zu seinem Höfling: „Sage mir, wie ich dich zum Dank für dieses wunderschöne Geschenk belohnen kann. Ich werde dir jeden Wunsch erfüllen.“ „Nichts weiter will ich, als dass Ihr das Schachbrett mit Reis auffüllen möget. Legt ein Reiskorn auf das erste Feld, zwei Reiskörner auf das zweite Feld, vier Reiskörner auf das dritte, acht auf das vierte und so fort.“ Der König war erstaunt über soviel Bescheidenheit und ordnete sogleich die Erfüllung des Wunsches an. Sofort traten Diener mit einem Sack Reis herbei und schickten sich an, die Felder auf dem Schachbrett nach den Wünschen des Höflings zu füllen. Bald stellten sie fest, dass ein Sack Reis gar nicht ausreichen würde und ließen noch mehr Säcke aus dem Getreidespeicher holen. 64 Felder hatte das Schachspiel. Schon das zehnte Feld musste für den Höfling mit 512 Körnern gefüllt werden. Beim 21. Feld waren es schon über eine Million Körner. Und lange vor dem 64. Feld stellten die Diener fest, dass es im ganzen Reich des Königs nicht genug Reiskörner gab, um das Schachbrett aufzufüllen.

(a) Insgesamt sind $n = 8^2 = 64$ Schachbrettfelder zu füllen. Berechne für $n = 1, \ldots, 10$ die Anzahl der Reiskörner r_n auf dem n-ten Feld und Gesamtanzahl Reiskörner s_n auf Feldern 1 bis n.

(b) Stelle für beliebiges n eine Formel für die Anzahl der Reiskörner r_n auf dem n-ten Feld und eine Formel für die Gesamtanzahl Reiskörner s_n auf Feldern 1 bis n auf.

(c) Beweise die geometrische Summenformel: Für beliebiges $q \in \mathbb{Q}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{i=0}^{n} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

(d) Benutze die Formel, um die Anzahl Reiskörner auf dem 64. Feld zu berechnen.

2. Ein Turm bis in den Himmel

Ein größenwahnsinniger König hat sich in den Kopf gesetzt, einen Turm bis zu Gott zu bauen. Dazu türmt er würfelförmige Steine übereinander. Er startet mit einem Stein von 10 m Kantenlänge, jeder darauffolgende Würfel hat aus optischen Gründen nur noch neun Zehntel der Höhe des vorangegangenen Würfels.
Wie hoch wird der Turm, wenn der König nach diesem Muster immer neue Würfel auftürmt? Reicht das bis zu Gott?

3. **Bienen summen anders**

   Ein männliche Biene (also eine Drohne) schlüpft aus einem unbefruchteten Ei einer Bienenkönigin, während aus den befruchteten Eiern die weiblichen Arbeiterbienen und Königinnen schlüpfen. Eine Drohne hat also nur ein „Elter" (nämlich eine Königin), während Königinnen zwei Eltern haben. Zeichne einen Bienenstammbaum einer Drohne, in dem ihre Vorfahren in den vorherigen Generationen zu sehen sind. Wie viele Vorfahren hat die Drohne in der $n-$ten Vorfahrensgeneration? Begründe deine Vermutung.

Zum Überlegen für zuhause:

1. **Bandwurmsatz mit „r"**

   Subtrahiert man r vom Zähler des Bruchs $\frac{3}{4}$ und addiert r zu dessen Nenner, dann erhält man einen Bruch, der halb so groß ist wie $\frac{3}{4}$. Welche rationalen Zahlen r sind möglich?

2. **Die Entwicklung eines Waldbestandes und seine Folgen**

   Ein Kiefernwald hat einen Bestand von 1200 gesunden Bäumen. Man muss damit rechnen, dass aufgrund von Schadstoffeinflüssen jährlich etwa 20% der gesunden Bäume erkranken. Deshalb beschließt man, jährlich 150 neue Bäume zu pflanzen. Wie wird sich der Bestand an gesunden Bäumen entwickeln? Stelle eine Rekursionsformel für den Baumbestand im n-ten Jahr auf und berechne die konkrete Entwicklung des Baumbestandes für die nächsten 10 Jahre.