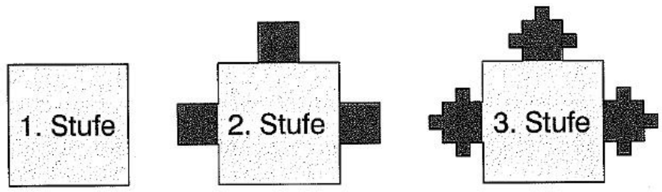
MSG 2014/2015 — Zirkel 8a
Thorsten Rohwedder

Aufgaben zum Zirkel am 25. Juni 2015

1. **Die Quadratpflanze**



Die Quadratpflanze ist eine seltsame, zweidimensionale Pflanze. Sie hat drei freie Seiten, eine Seite steckt in der Erde. Am Tag ihrer Entstehung ist sie ein Quadrat der Seitenlänge 1. Jeden Tag wächst an jeder freien Seite jedes Quadrates, das am Tag zuvor entstanden ist, in deren Mitte ein neues kleines Quadrat mit einer Seitenlänge, die einem Drittel der Länge des Ursprungsquadrats entspricht.

(a) Berechne für die ersten zehn Tage, also für $n = 1, 2, \ldots, 10$ jeweils den Flächeninhalt f_n und den Umfang u_n der Pflanze.

(b) Stelle eine Formel für den Flächeninhalt f_n der Quadratpflanze am n-ten Tag auf.

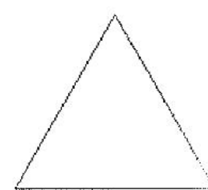
(c) Stelle eine Formel für den Umfang u_n der Quadratpflanze auf am n-ten Tag auf.

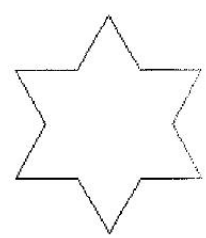
(d) Wie verhält sich die von der Pflanze bewachsene Fläche f_n, wenn n immer größer wird, also für $n \to \infty$?

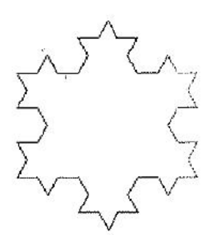
(e) Wie verhält sich der Umfang u_n der Pflanze für $n \to \infty$?

2. **Die Kochsche Schneeflocke**

Bereits 1904 „erfand" der schwedische Mathematiker Helge von Koch eine seltsame Kurve, die er ausgehend von einem gleichseitigen Dreieck durch wiederholtes Anwenden einer einfachen Konstruktion erzeugte. Rechts siehst du die Stufen 0, 1 und 2 der „Kochschen Schneeflocke".


Stufe 0


Stufe 1


Stufe 2

(a) Beschreibe die Konstruktion, die von Stufe n zu Stufe $(n+1)$ führt.

(b) Wie viele Dreiecke kommen jeweils von Stufe n zu Stufe $(n+1)$ hinzu? Mache dir zunächst die Stufen $0 \rightsquigarrow 1$, $1 \rightsquigarrow 2$ und $2 \rightsquigarrow 3$ klar und stelle dann einen allgemeinen Term auf.

(c) Wie groß ist der Flächeninhalt eines Dreiecks, das bei dem Schritt von Stufe n zu Stufe $(n+1)$ hinzukommt? Stelle einen Term auf.

(d) Wie verändert sich der Umfang der Schneeflocke durch Hinzukommen eines Dreiecks bei dem Schritt von Stufe n zu Stufe $(n+1)$?

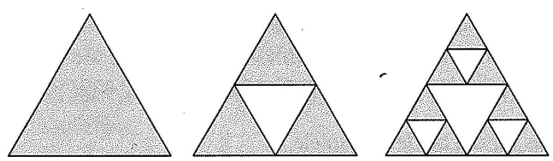
(e) Bestimme mit Hilfe deiner Ergebnisse aus (b), (c) und (d) den Flächeninhalt der n-ten Stufe der Koch'schen Schneeflocke und ihren Umfang.

(f) Wie entwickeln sich Flächeninhalt und Umfang, wenn n immer größer wird?

Zum Weiterdenken:

1. **Das Sierpinski-Dreieck**

   Das Sierpinski-Dreieck ist ein weiteres *fraktales Muster* wie die Quadratpflanze und die Koch'sche Schneeflocke. Es wird nach folgendem Verfahren gebildet:
   Zeichne ein ausreichend großes gleichseitiges Dreieck (Stufe 0). Verbinde die Mittelpunkte der Dreieckseiten, so dass vier kleine gleichseitige Dreiecke entstehen. Entferne das mittlere Dreieck. Es bleiben drei kleine kongruente Dreiecke übrig (Stufe 1).

   Stufe 0 Stufe 1 Stufe 2

   Wiederhole dann die Konstruktion für jedes der verbleibenden kleinen grauen Dreiecke ($\rightsquigarrow$ Stufe 2). Setze das Verfahren in den nächsten Stufen mit den jeweils neu entstehenden grauen Dreiecken fort.

   (a) Zeichne die Sierpinski-Dreiecke der Stufen 3 und 4.

   (b) Wie verändert sich der Flächeninhalt der verbleibenden Dreiecke von Stufe zu Stufe? Beschreibe den Flächeninhalt der n-ten Stufe mit Hilfe einer geeigneten Folge. Den Flächeninhalt des Dreiecks in der 0. Stufe kannst du dabei mit A_0 abkürzen.

   (c) Beschreibe das „Langzeitverhalten" des Flächeninhalts. Wird der Flächeninhalt irgendwann kleiner als $0,1\%$ dessen der Stufe 0?

   (d) Unter dem Umfang u_n des n-ten Sierpinski-Dreiecks verstehen wir die zusammengenommene Länge aller Seitenlinien aller grau gefärbten Dreiecke. Wenn die Stufe 0 die Seitenlänge ℓ hat, ist also $u_0 = 3\ell$, $u_1 = \frac{9}{2}\ell$ und so weiter. Beschreibe den Umfang des n-ten Sierpinski-Dreiecks mit einer geeignten Folge und untersuche, wie sich der Umfang für immer größer werdendes n entwickelt.