MSG 2014/2015 — Zirkel 8a
Thorsten Rohwedder

Aufgaben zum Zirkel am 2. Juli 2015

– Paradoxes –

1. **$0,\overline{9} = 1$?**

   (a) Was meinst du? Da sollte doch eigentlich $\approx$ stehen? Oder nicht? Finde Argumente für deine Entscheidung und diskutiere diese mit den anderen.

   (b) Schaue dir das folgende Streitgespräch an. Welche Argumentation überzeugt euch mehr?

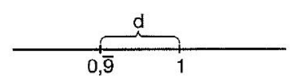
A: Das Gleichheitszeichen kann nicht zutreffen.
Egal, wie viele Neunen ich hinschreibe, es bleibt immer ein kleiner Unterschied d zu 1.

bei 10 Neunen: $1 - 0{,}9999999999 = 0{,}0000000001$ $\quad d = \left(\frac{1}{10}\right)^{10}$

bei 100 Neunen: $1 - 0{,}9999 \ldots 999 = 0{,}0000 \ldots 001$ $\quad d = \left(\frac{1}{10}\right)^{100}$

bei n Neunen: $\quad d = \left(\frac{1}{10}\right)^{n}$

B: Das Gleichheitszeichen ist korrekt.
Du behauptest also, dass $0{,}\overline{9}$ echt kleiner ist als 1.
Das bedeutet doch, dass es auf der Zahlengeraden zwischen $0{,}\overline{9}$ und 1 einen positiven Abstand d gibt.
Gib mir einen solchen Abstand vor:



z. B. $d = \left(\frac{1}{10}\right)^{1000}$: Dann schreibe ich 1001 Neunen hinter das Komma und damit ist der Abstand unterschritten.

z. B. $d = \left(\frac{1}{10}\right)^{1000000}$: Dann schreibe ich 1000001 Neunen hinter das Komma und damit ist auch dieser Abstand unterschritten.

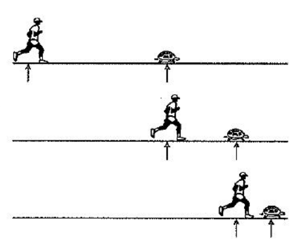
Gleichgültig, welchen noch so kleinen Abstand d du mir vorgibst, ich kann immer ein Teilstück von $0{,}\overline{9}$ angeben, dessen Abstand zu 1 kleiner ist als d.
Also kann es keinen positiven Abstand zwischen $0{,}\overline{9}$ und 1 geben und damit ist $0{,}\overline{9} = 1$.

   (c) $0,\overline{9}$ ist der Grenzwert der Folge (0,9; 0,99; 0,999; 0,9999;...). Schreibt diese Folge als geometrische Reihe um und berechne ihren Grenzwert.

2. **Achilles und die Schildkröte**

Achilles und die Schildkröte

Achilles ist ein mutiger Wettläufer. Sich seines Sieges sicher, tritt er einen Wettlauf gegen eine Schildkröte an. Er gewährt ihr einen Vorsprung und sie läuft los.
Der griechische Philosoph Zenon von Elea (495–430 v. Chr.) behauptet, dass Achilles das Rennen nicht gewinnen kann, er könne die Schildkröte gar nicht einholen.
Er argumentiert so:
„Wenn Achilles losläuft, ist die Schildkröte wegen ihres Vorsprungs ein paar Schritte voraus. Bis Achilles diesen Vorsprung aufgeholt hat, ist die Schildkröte wiederum ein Stück weiter, auch wenn der Vorsprung nun kleiner ist. Bis Achilles diesen neuen Vorsprung aufgeholt hat, ist die Schildkröte wiederum ein kleines Stück weiter. Auch dieses Stück holt Achilles in kurzer Zeit auf, aber dann ist die Schildkröte wiederum ein Stück weiter. Dieses Spiel setzt sich unendlich fort. Der Vorsprung der Schildkröte wird zwar immer kleiner, aber trotzdem bleibt die Schildkröte vorne. Also wird Achilles die Schildkröte nie einholen.“



Bitte wenden!

Das Paradoxon ist das von Achilles und der Schildkröte, das auf den griechischen Philosophen Zenon zurückgeht, bringt die Menschen seit Jahrtausenden zum Nachdenken.

(a) Was hältst du von dieser Argumentation? Worin besteht das Paradoxe?

(b) Diskutiere mit den anderen, wie sich dieses Paradoxon auflösen lässt. Vielleicht hilft dir ein Weg-Zeit-Graph, eine Tabelle, die Betrachtung geeigneter Folgen,...

(c) In dem Zusammenhang sind mehrere geometrische Folgen versteckt. Findet ihr sie?

Zum Weiterdenken:

1. **Treppenspielchen**

   In dieser Aufgabe wollen wir die Länge der Diagonale in einem Quadrat mit Seitenlänge 1 bestimmen.

   (a) Zeichne ein Quadrat mit Seitenlänge 1 dm und bestimme die Länge seiner Diagonalen durch Messen.

   (b) In der Abbildung unten sind im Einheitsquadrat Treppen zunehmender Stufenanzahl n eingezeichnet (für $n = 4, 6, 12$). Geht die Stufenzahl n gegen unendlich, so geht der Abstand zur Diagonalen für jeden Treppenpunkt gegen Null. Gegen welchen Wert konvergiert also die Länge der Treppen für $n \to \infty$?