MSG 2014/2015 — Zirkel 8a
Thorsten Rohwedder
Zirkel am 27.11.14

Quod esset demonstandum!

**Suche dir eine der Beweisaufgaben 1. oder 2. aus.
Wenn du damit fertig bist, kannst du dir eine der anderen Aufgaben vornehmen.**

1. **Sätze zu Mittellinien und Seitenhalbierenden im Dreieck**

   - **Mittellinien:**

     (a) Zeichne ein beliebiges (nicht zu kleines) Dreieck. Konstruiere eine Parallele zu einer der Grundseiten, die durch den Mittelpunkt der Höhe auf diese Seite verläuft (also die Mittelsenkrechte auf diese Höhe). Diese schneidet die beiden übrigen Dreiecksseiten in zwei Punkten M und N; die Strecke $\overline{MN}$ heißt Mittellinie des Dreiecks.

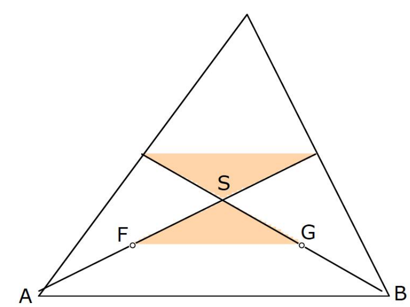
     (b) Beweise: Eine Mittellinie ist halb so lang wie die zugehörige Grundseite.

     (c) Beweise: Die Punkte M und N teilen jeweils die Dreiecksseiten, auf denen sie liegen, in zwei gleich lange Hälften.

     (d) Formuliere und beweise die Umkehrung von c).

   - **Seitenhalbierende:**

     (a) Zeige, dass sich zwei Seitenhalbierende gegenseitig im Verhältnis 2:1 teilen (die Strecke von Schnittpunkt zu Eckpunkt ist doppelt so lang wie die Strecke von Schnittpunkt zur Mitte der gegenüberliegenden Seite). Dabei hilft dir (hoffentlich) die Skizze rechts – und das Wissen aus dem ersten Teil der Aufgabe (Mittellinien von Dreiecken), dass sich auf zwei verschiedene Dreiecke anwenden lässt.

     (b) Zeige, dass auch die dritte Seitenhalbierende durch den Schnittpunkt der anderen beiden verläuft und dass auch diese im Verhältnis 2:1 geteilt wird.

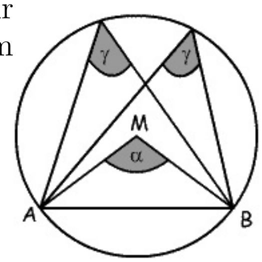
2. **Zentriwinkelsatz und Peripheriewinkelsatz**

   - **Ein paar Begriffe:**
     Ein jedes Dreieck ΔABC besitzt einen Umkreis mit Mittelpunkt M, auf dem seine Eckpunkte liegen. Zum Beispiel liegen die Punkte A und B auf dem Kreisbogen um M, die Strecke $\overline{AB}$ ist also eine Sehne des Kreises. Der Mittelpunktswinkel (oder Zentriwinkel) zur Sehne $\overline{AB}$ ist der Winkel $\angle AMB$.
     Der Punkt C liegt ebenfalls auf der „Peripherie“ (d.h.: auf dem Rand) des Umkreises; der Winkel $\angle ACB$ wird in diesem Zusammenhang als Peripheriewinkel oder Umfangswinkel bezeichnet. Mache dir die Begriffe anhand einer Zeichnung klar.

- **Der Mittelpunktswinkelsatz (oder Kreiswinkelsatz oder Zentriwinkelsatz):**

  Die Sehne $\overline{AB}$ teilt den Kreis in zwei Teile. Beweise den Zentriwinkelsatz: „Liegt der Zentriwinkel $\angle AMB$ zu einer Kreissehne $\overline{AB}$ im selben Teil des Kreises wie der Punkt C, so ist er immer doppelt so groß wie der Peripheriewinkel $\angle ACB$."

  Nutze dafür das Beweisprinzip der *Fallunterscheidung*: Für den Mittelpunkt des Umkreises gibt es drei Möglichkeiten im Verhältnis zum Dreieck mit dem Peripheriewinkel.

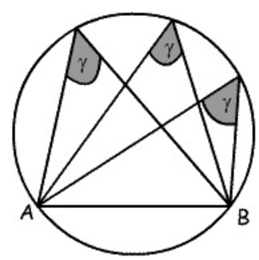
  (a) Er liegt auf einer Seite des Dreiecks.

  (b) Er liegt innerhalb des Dreiecks.

  (c) Er liegt außerhalb des Dreiecks.

  Der Zentriwinkelsatz ist insgesamt bewiesen, wenn er für jeden dieser Fälle einzeln bewiesen ist.

- **Der Umfangswinkelsatz (oder: Peripheriewinkelsatz):**

  (a) Rechts siehst du eine bildliche Darstellung der Aussage des so genannten Peripheriewinkelsatz. Formuliere den Satz in Worten und beweise ihn.

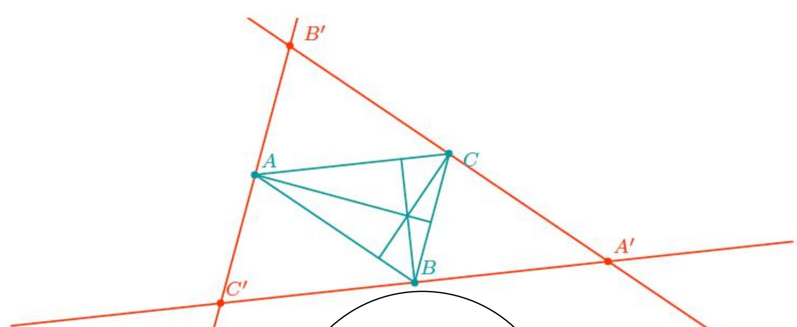
  (b) Formuliere eine Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes und beweise sie.

  (c) Wieso kann man den Umfangswinkelsatz als Verallgemeinerung des Satzes von Thales bezeichnen?

<u>**Bonus für später/zu Hause:**</u>

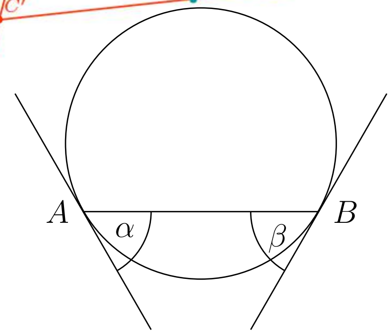
1. **Der Höhenschnittpunkt**

   Beweise, dass sich die drei Höhen jedes Dreiecks ΔABC in einem gemeinsamen Punkt schneiden.
   Du kannst die Skizze rechts als Denkanstoß nutzen.

2. **Sehnen-Tangentenwinkelsatz**

   Gegeben sei ein Kreis. Ein *Sehnen-Tangentenwinkel* ist der Winkel zwischen einer Sehne und einer Tangente, die den Kreis in einem Endpunkt der Sehne berührt (siehe Bild, α und β sind Sehnen-Tangentenwinkel).

   (a) Zeige, dass die beiden Sehnen-Tangentenwinkel α und β gleich groß sind.

   (b) Beweise den *Sehnen-Tangentenwinkelsatz*:
   Für jede Sehne $\overline{AB}$ sind Sehnen-Tangentenwinkel und Peripheriewinkel über dem Bogen BA gleich groß.