Rekursive Folgen und Iterationsverfahren in Theorie und Praxis I

– ab 18. Februar 2016 –

1. **Lineare Rekursionen in der Praxis I**

   Im Programm `folgen1` werden die ersten Glieder einer rekursiv definierten Folge berechnet und geplottet.

   (a) Lasse das Programm `folgen1` ablaufen und vollziehe den Programmablauf Zeile für Zeile nach. Wie lautet der Anfangswert, wie die Rekursionsvorschrift? Beschreibe das langfristige Verhalten der Folge.

   (b) Ändere den Code so ab, dass die Folge mit einem anderen Startwert beginnt. Untersuche dann das Verhalten der Folge für verschiedene Startwerte.

   (c) Verändere den Code so, dass das Programm den Folgenverlauf für verschiedene Startwerte (z.B. $x_0 = -10, -9, \ldots, , 19, 20$) in ein Bild plottet.

2. **Lineare Rekursionen in der Praxis II**

   (a) Finde für die Folge aus Aufgabe 1 alle Startwerte, die bei der Anwendung der Rekursionsvorschrift unverändert bleiben (die so genannten Fixpunkte der Rekursion).

   (b) Die Folge aus Aufgabe 1 ist ein Spezialfall einer linearen rekursiven Folge

   $$x_{n+1} = a \cdot x_n + b.$$

   Untersuche mit Hilfe des Programms für verschiedene Werte von a, b (auch negativ, nicht ganzzahlig,...) und verschiedene Startwerte x_0, wie sich die Folge verhält, d.h., ob sie konvergiert oder divergiert und ob du im Fall der Konvergenz erkennen kannst, wie der Grenzwert mit den Parametern a, b und x_0 zusammenhängt.

3. **Lineare Rekursionen in der Theorie**

   In dieser Aufgabe wollen wir die Eigenschaften allgemeiner linearer rekursiver Folgen

   $$x_{n+1} = a \cdot x_n + b \qquad (*)$$

   mit Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ und Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ rechnerisch untersuchen.

   (a) Bestimme die Fixpunkte der linearen Rekursion $(*)$.

   (b) Finde eine explizite Darstellung für die Glieder der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$, also eine Darstellung, aus der sich x_n direkt ohne Kenntnis von x_{n-1} bestimmen lässt (x_0 darf eingehen!). Hierbei ist möglicherweise die geometrische Summenformel $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ hilfreich.

   (c) Treffe mit Hilfe der der Ergebnisse aus (a) und (b) eine Aussage darüber, für welche $a, b, x_0 \in \mathbb{R}$ die Folge konvergiert und für welche sie divergiert (d.h. nicht konvergiert).

   (d) Beweise: Wenn man in der Rekursionsvorschrift $a = 2$ wählt, ist jede Iterierte x_n mit $n \geq 2$ das arithmetische Mittel seiner beiden Vorgänger, d.h.

   $$x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1}).$$

   (e) Wie lässt sich das Ergebnis aus (c) für den Fall verallgemeinern, dass $a \neq 2$ ist?

4. **Rekursionen mit Reziproken**

   (a) Untersuche für die Rekursionsvorschriften

   $$x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + 2, \quad x_{n+1} = 3 - \frac{1}{x_n}, \quad x_{n+1} = 1 - \frac{1}{x_n},$$

   $$x_{n+1} = 2 - \frac{3}{x_n}, \quad x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$$

   das Verhalten der Folgenglieder zugehöriger Folgen. Teste verschiedene Startwerte und halte deine Beobachtungen fest.

   (b) Bestimme die Fixpunkte von Rekursionen der allgemeinen Form

   $$x_{n+1} = \frac{a}{x_n} + b$$

   und versuche, Aussagen über ihre Konvergenz in Abhängigkeit von a, b und x_0 zu treffen.

   (c) Beschreibe das Verhalten der Folgenglieder der dritten Folge aus (a). Kannst du ihr Verhalten rechnerisch ausdrücken?

   (d) Die Folge $x_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{x_n}$ aus (a) ist anscheinend konvergent. Beweise ihre Konvergenz rechnerisch.

5. **Rückwärts gedacht**

   In Aufgabe 4 haben wir uns überlegt, dass eine Rekursionen der Form

   $$x_{n+1} = \frac{a}{x_n} + b \qquad (*)$$

   im Fall der Konvergenz gegen einen Grenzwert der Form $x^* = m + \sqrt{n}$ konvergiert. Konstruiere umgekehrt zu vorgegebenen Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ eine Iteration der Form $(*)$, die gegen $x^* = m + \sqrt{n}$ konvergiert.

6. **Rekursionen mit Wurzeln**

   Untersuche die Rekursionsvorschriften

   $$x_{n+1} = \sqrt{x_n} + a, \quad x_{n+1} = a - \sqrt{x_n}$$

   für verschiedene $a \in \mathbb{R}$ auf ihr Konvergenzverhalten. Bestimme insbesondere wieder die Fixpunkte der Rekursionen.

7. **Chaotische Rekursionen**

In dieser Aufgabe betrachten wir die Rekursionsvorschrift

$$x_{n+1} = x_n^2 - c \qquad (*)$$

mit Startwert $x_0 = 0$ für verschiedene Werte von c.

(a) Bestimme die Fixpunkte der Rekursionsvorschrift und eine notwendige Bedingung dafür, dass die Rekursion $(*)$ überhaupt konvergieren kann.

(b) Untersuche das Verhalten der entstehenden Folgen für einige Werte für c und beschreiben ihr Verhalten. Untersuche insbesondere die Fälle

- $0 < c < 0{,}75$,
- $0{,}75 < c \leq 1{,}2$,
- $c \approx 1{,}3$,
- $c = 1{,}75$,
- $1{,}8 < c < 2$.

(c) In (b) ergeben sich in einigen Fällen Folgen, die konvergente *Teilfolgen* besitzen. Formuliere für diese Teilfolgen eine Rekursionsvorschrift und ihre zugehörige Fixpunktgleichung.

8. **Nullstellen von komplizierteren Funktionen**

(a) Im Gegensatz zu quadratischen Funktion/Gleichungen sind die Nullstellen eines Polynoms dritten Grades, also einer Funktion der Form

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

(mit festen Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) nicht mehr so einfach bestimmbar. Untersuche mit Hilfe der Plotfunktion von GeoGebra, wie viele Nullstellen ein Polynom 3. Grades haben kann. Schieberegler für a, b, c und d sind hierbei nützlich.

(b) Bestimme für das Polynom

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

mit Hilfe von GeoGebra Näherungen für die Nullstellen von f.

(c) Schreibe die zugehörige Gleichung

$$x^3 - 3x^2 + 1 = 0$$

zu einer Fixpunktgleichung $x = \phi(x)$ um. Plotte mit Hilfe von GeoGebra den Verlauf von ϕ. Wie verhält sich die Steigung von ϕ in der Nähe der jeweiligen Fixpunkte?

(d) Teste die Konvergenz der Fixpunktiterationen $x_{n+1} = \phi(x_n)$. Wähle dazu die Schätzwerte aus (b) als Startwerte für eine Fixpunktiteration und erkläre deine Beobachtungen.

9. **Vier verschiedene Fixpunktiterationen**

   In Aufgabe 8 wurde die Polynomgleichung $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ in eine Fixpunktgleichung verwandelt. Hier sind vier andere Möglichkeiten:

   (i) $\phi_1(x) = 3 - \frac{1}{x^2}$

   (ii) $\phi_2(x) = \frac{x^3+1}{3x}$

   (iii) $\phi_3(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$

   (iv) $\phi_4(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{3-x}}$

   (a) Überprüfe rechnerisch, dass die Fixpunkte der Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$ genau die Nullstellen des Polynoms f sind.

   (b) Plotte die Graphen von $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$. Versuche anhand der Steigung der jeweiligen Graphen zu entscheiden, welche Fixpunkte anziehend, welche abstoßend sind.

   (c) Teste die Iterationen mit geeigneten Startwerten und verifiziere deine Vermutungen aus (b).

10. **Dreieinhalb Probleme – Gleichungen aufstellen**

   (a) Eine Leiter von 4 Meter Länge wird an eine senkrechte Wand gelehnt. An der Wand steht eine würfelförmige Kiste mit 1m langen Seiten. Wie weit ist die Leiter von der Wand entfernt, wenn sie die Kiste berührt?

   (d) Ein Auto verliert im Laufe seines „Lebens“ an Wert – nur wie, darüber lässt sich trefflich steiten. Vergleichen wir für ein konkretes Auto vom Neuwert 20.000 € zwei Modelle:

   - pro Jahr fällt der Wert um 1.000 €(bis er Null ist, lineare Wertabnahme)
   - pro Jahr fällt der Wert um 15 % (exponentielle Wertabnahme)

   Ermittle mit Hilfe einer Gleichung die Zeitpunkte, zu denen das Auto nach beiden Modellen den gleichen Wert hat.

   (c) Aus einem DIN-A4-Blatt werden an den vier Ecken gleich große Quadrate der Seitenlänge x ausgeschnitten, die Restfigur wird zu einer Schachtel gefaltet. Für welche x hat die Schachtel ein Volumen von 1 Liter?

   (d) Gibt es auch für ein Volumen von 1,1 Liter eine Antwort auf die Frage in (c)?

11. **Dreieinhalb Probleme – Computerhilfe I**

   Bestimme mit Hilfe der Plotfunktion von GeoGebra Näherungslösungen für die Probleme aus Aufgabe 1.
   Stelle dann die Gleichung aus (a) auf verschiedene Arten in eine Fixpunktgleichung $x = \phi(x)$ um. Findest du eine, die für die genaue Berechnug der Lösung mit einem Iterationsverfahren geeignet ist? (Zur Beantwortung dieser Frage kannst du auch GeoGebra nutzen, um ϕ zu plotten und die Steigung im Fixpunkt zu analysieren.)

12. **Dreieinhalb Probleme – Computerhilfe II**

   (a) Erstelle einen *Pseudocode* für das Bisektionsverfahren und das Sekantenverfahren. Ermittle dabei insbesondere Auswertungsvorschriften für die benötigten Größen.

   (b) Setze beide Verfahren in Python um und teste sie gegeneinander anhand der Probleme aus Aufgabe 1.