MSG 2014/2015 — Zirkel 9a
Thorsten Rohwedder

Aufgaben zur Zahlentheorie

– ab 3.9.2015 –

1. **Rechnen für Einsteiger**
   Stelle mit vier Vieren, den Rechenzeichen $+$, $-$, $\cdot$, $:$, $($, $)$ die Zahlen von 0 bis 9 dar.

   $0 =$

   $1 =$

   $2 =$

   $3 =$

   $4 =$

   $5 =$

   $6 =$

   $7 =$

   $8 =$

   $9 =$

2. **Was sind die natürlichen Zahlen?**
   „Eine Menge N nennen wir *die natürlichen Zahlen*, wenn..“ – versuche, eine Definition der natürlichen Zahlen zu formulieren.

3. **Gibt es unendlich viele Primzahlen?**
   Du weißt vielleicht schon, dass dem so ist. Aber wie beweist man das? In dieser Aufgabe hat schon jemand eine Vorarbeit geleistet, nur ist der Beweis etwas durcheinander geraten. Sortiere die Beweisschnipsel sinnvoll und schreibe den Beweis dann vollständig in der richtigen Reihenfolge auf.

1. Damit teilt p also k und $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$.

2. Deswegen gibt es eine Primzahl p, die k teilt.

3. Wir wissen aber, dass jede ganze Zahl mindestens einen Primteiler besitzt.

4. Also muss unsere Annahme falsch gewesen sein.

5. Angenommen es gibt nur endlich viele Primzahlen.

6. Weil $p_1, p_2, \ldots, p_n$ alle Primzahlen sind, muss p eine der Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sein.

7. Dann können wir sie alle hinschreiben, etwa: $p_1, p_2, \ldots, p_n$

8. Nun bilden wir aus diesen Primzahlen eine neue Zahl $k = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$

9. Also teilt p auch die 1, was im Widerspruch dazu steht, dass p eine Primzahl ist.

4. **Faktorisierungstricks**

   (a) Zeige: Für $a, b, n \in \mathbb{N}$ mit n ungerade und $a > b$ ist $a + b$ ein Teiler von $a^n + b^n$.

   (b) Zeige: Für $a, b, n \in \mathbb{N}$ mit $a > b$ ist $a - b$ ein Teiler von $a^n - b^n$.

   (c) Zeige, dass $2^{(3^{33333})} + 1$ keine Primzahl ist, indem du einen echten Teiler angibst.

   (d) Zeige, dass $2^{(3^{33333})} - 1$ keine Primzahl ist, indem du einen echten Teiler angibst.

5. **Beweise dich!**

   (a) Ist n keine Primzahl, so ist $2^n - 1$ ebenfalls keine Primzahl.

   (b) Besitzt n einen ungeraden Teiler, so ist $2^n + 1$ keine Primzahl.

6. **Fermat'sche und Mersenne'sche Primzahlen**

   Primzahlen der Form $p = 2^n + 1$ heißen Fermatsche Primzahlen, Primzahlen der Form $p = 2^n - 1$ Mersennesche Primzahlen.

   (a) Bestimme jeweils drei Fermatsche Primzahlen und drei Zahlen der Form $2^n + 1$, die nicht prim sind.

   (b) Bestimme jeweils drei Mersennesche Primzahlen und drei Zahlen der Form $2^n - 1$, die nicht prim sind.

   (c) Gib eine Bedingung an, die die Potenz n einer Fermat'sche bzw. Mersenne'sche Primzahl erfüllen muss, damit dies wirklich eine Primzahl sein kann.

7. **Resterampe**

   Bestimme die folgenden Reste:

   (a) den Rest von $532 \cdot 24^2 - 21^{32}$ bei Division durch 5,

   (b) den Rest von $(156 + 269^{10})^3$ bei Division durch 9,

   (c) den Rest von$(27^3 - 92)^9 \cdot (56^2 + 143)$ bei Division durch 10.

8. **Quadratisch, praktisch, Rest**

   Ein quadratischer Rest modulo m ist ein Rest, den man bei Division einer Quadratzahl durch m erhalten.

   (a) Zeige, dass es modulo 4 genau die quadratischen Reste 0 und 1 gibt.

   (b) Bestimme alle quadratischen Reste modulo 3, 5, 6, 7, 8.

   (c) Für welche ganzen Zahlen n ist $n^2 - 1$ durch 8 teilbar?

   (d) Bestimme alle quadratischen Reste modulo 10. Was sagt dir das über die möglichen Einerziffern einer Quadratzahl?

9. **Vermischte Teilbarkeiten**

   (a) Zeige für $A = 310^5 + 410^5$, dass $7|A$ gilt. Bestimme $A \mod 11$ und $A \mod 13$.

   (b) Zeige, dass $3n - 1, 5n \pm 2, 7n - 1, 7n - 2, 7n + 3$ keine Quadratzahlen sein können.

   (c) Zeige, dass eine Zahl, die aus 3^n gleichen Ziffern besteht, durch 3^n teilbar ist.