

Die Euler'sche Summenformel

Teilnehmer:

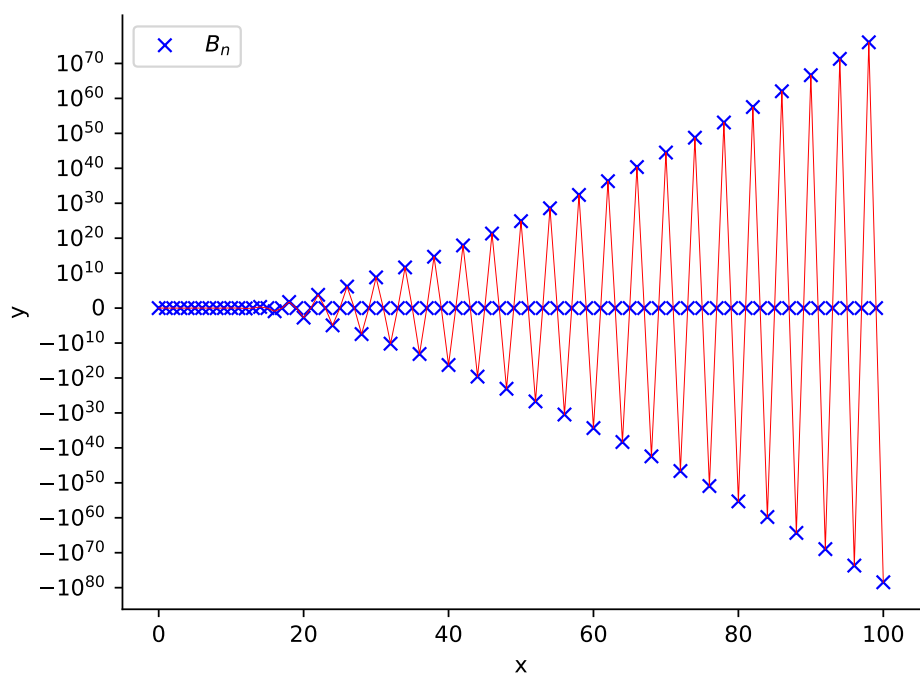
Andreas-Gymnasium	1 Mädchen
Heinrich-Hertz-Gymnasium	3 Jungen
Herder-Gymnasium	1 Junge
Käthe-Kollwitz-Gymnasium	2 Mädchen, 2 Jungen

mit tatkräftiger Unterstützung durch:

Tobias Kretzschmar	Humboldt-Universität zu Berlin
--------------------	--------------------------------

Gruppenleiter:

Eren Uçar	Humboldt-Universität zu Berlin
-----------	--------------------------------



1. Bernoulli-Zahlen und -Polynome

1.1. Bernoulli-Zahlen

Im Jahr 1713 wurde die von Jakob I Bernoulli entdeckte Folge der Bernoulli-Zahlen in einem langjährig von ihm verfassten Werk veröffentlicht. Heute sind zahlreiche Anwendungen der Folge, oftmals in Zusammenhang mit der Folge der Bernoulli-Polynome, in Bereichen der Mathematik und Physik bekannt. Unter anderem sind sie in der Primzahltheorie, der Quantenphysik und als Koeffizienten von Taylorreihen in der Funktionentheorie von Bedeutung. Eine weitere Anwendung ist die Euler'sche Summenformel, die im Folgenden betrachtet wird. Für ein besseres Verständnis definieren wir zunächst die Bernoulli-Zahlen.

Definition 1. Die Bernoulli-Zahlen $B_n, n \in \mathbb{N}_0$, werden rekursiv wie folgt definiert. Man setzt $B_0 := 1$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ soll gelten:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \cdot B_k = 0. \tag{1}$$

Beispiel 1. Dies erzeugt eine Folge rationaler Zahlen mit folgenden Anfangsgliedern.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_k	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$

Die Beträge der ersten Bernoulli-Zahlen sind zwar klein, aber man darf sich nicht täuschen lassen, denn die Zahlen $|B_{2k}|$ wachsen sehr schnell! Zum Beispiel ist $B_{30} \approx 6 \cdot 10^8$.

1.2. Bernoulli-Polynome

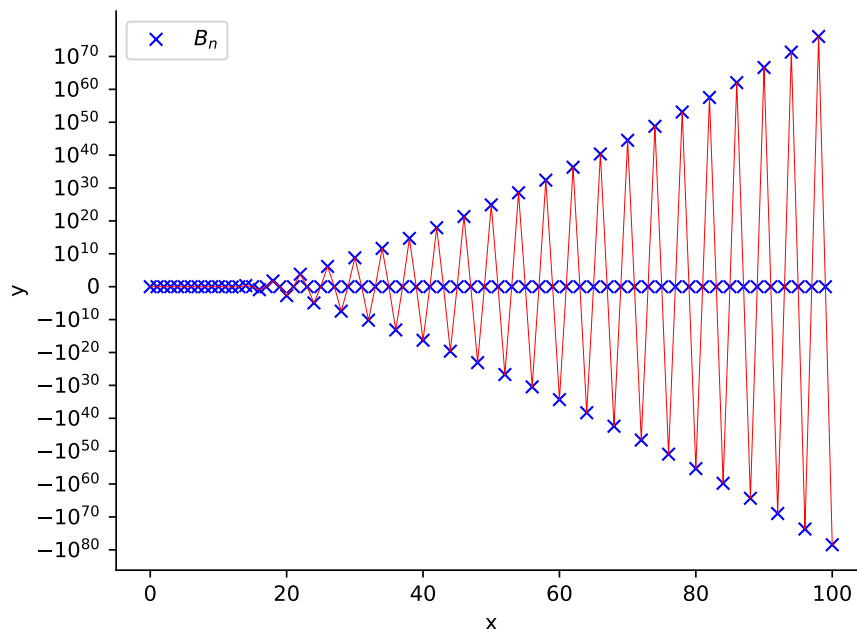


Abbildung 15: Die Bernoulli-Zahlen für $n \in [0; 100]$

Wie erwähnt, sind die Bernoulli-Polynome eine direkte Anwendung der Bernoulli-Zahlen und unerlässlich für das Verständnis der Euler'schen Summenformel. Folglich werden sie an dieser Stelle definiert.

Definition 2. Die Bernoulli-Polynome $B_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$, sind wie folgt definiert:

$$B_n(x) := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot x^{n-k}. \quad (2)$$

Beispiel 2. Die Definition liefert eine Folge von Polynomen, die mit den folgenden Termen beginnt.

$B_0(x)$	$B_1(x)$	$B_2(x)$	$B_3(x)$	$B_4(x)$
1	$x - \frac{1}{2}$	$x^2 - x + \frac{1}{6}$	$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$	$x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$

Bemerkung 1. Aus der Definition ergibt sich $B_n(0) = B_n$.

1.3. Eigenschaften der Bernoulli-Polynome

Die Bernoulli-Polynome weisen einige im Folgenden relevanten Eigenschaften auf, die hier genannt und bewiesen werden sollen.

Lemma 1. Für $n \in \mathbb{N}_0$ gelten:

$$\begin{aligned} (E1) \quad & B_n(1) = B_n(0), n \neq 1, \\ (E2) \quad & B'_n(x) = n \cdot B_{n-1}(x), n \geq 1, \\ (E3) \quad & \int_0^1 B_n(x) dx = 0, n \geq 1. \end{aligned}$$

Die Eigenschaft (E2) besagt insbesondere, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $\frac{1}{n} \cdot B_n(x)$ eine Stammfunktion von $B_{n-1}(x)$ ist.

Beweis:

(E1): Dass $B_0(0) = 1 = B_0(1)$ gilt, ist trivial. Also betrachten wir $n \geq 2$. Es gilt:

$$B_n(1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot B_k = B_n + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot B_k}_{=0 \text{ nach Definition}} = B_n + 0 = B_n(0).$$

(E2): Wir verwenden die Eigenschaft, dass

$$\binom{n}{k} (n-k) = \frac{n!(n-k)}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = n \binom{n-1}{k}. \quad (3)$$

Nun können wir die Ableitung berechnen.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} B_n(x) &= \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (n-k) \cdot B_k \cdot x^{n-k-1} \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot B_k \cdot x^{n-1-k} = n \cdot B_{n-1}(x). \end{aligned}$$

(E3): Wir nutzen (E1) und die Folgerung aus (E2).

$$\int_0^1 B_n(x) dx \stackrel{(E2)}{=} \frac{1}{n+1} \cdot B_{n+1}(x) \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} \cdot (B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0)) \stackrel{(E1)}{=} 0$$

□

1.4. Funktionalgleichung für die Bernoulli-Polynome

Wir führen im Folgenden eine auf die Bernoulli-Polynome zutreffende Funktionalgleichung ein, mit deren Hilfe man einige ihrer interessanten Eigenschaften beweisen kann.

Satz 1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}.$$

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir beweisen die Gleichung per Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Für $n = 1$ folgt offensichtlich

$$B_1(x+1) - B_1(x) = (x+1) - \frac{1}{2} - \left(x - \frac{1}{2}\right) = 1.$$

Zum Induktionsschritt: Sei die Gleichung für ein $n-1 \in \mathbb{N}$ bewiesen. Mit $F_n(x) := B_n(x+1) - B_n(x)$ folgt:

$$\frac{d}{dx} F_n(x) = n(B_{n-1}(x) - B_{n-1}(x)) = n(n-1)x^{n-2}.$$

Deshalb existiert eine feste Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit $F_n(x) = nx^{n-1} + C$. Zusammen mit (E1), d.h. $F_n(0) = 0$, folgt also $C = 0$. □

Korollar 1. Für $n, N \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^N k^n = \frac{B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}}{n+1}.$$

Beweis: Aus Satz 1 folgt:

$$\sum_{k=1}^N k^n = \sum_{k=1}^N \frac{B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(k)}{n+1} = \frac{B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}(1)}{n+1}. \quad (4)$$

wobei die letzte Umformung die Auswertung der Teleskopsumme ist. □

Korollar 2. Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist $B_{2m+1} = 0$.

Beweis: Wir setzen in Satz 1 ein gerades $n \geq 2$ und $x = -\frac{1}{2}$ ein.

$$\begin{aligned} n \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} &= B_n\left(1 - \frac{1}{2}\right) - B_n\left(-\frac{1}{2}\right) = B_n\left(\frac{1}{2}\right) - B_n\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k}\right) \end{aligned}$$

Wenn $n - k$ gerade ist, heben sich die Summanden auf. Da n nach Voraussetzung gerade ist, ist $n - k$ gerade genau dann, wenn k gerade ist. Somit gilt:

$$n \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \sum_{\substack{k=0 \\ 2 \nmid k}}^n \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}.$$

Der Term auf der linken Seite entspricht dem Summanden auf der rechten Seite für $k = 1$. Daher gilt:

$$0 = \sum_{\substack{k=2 \\ 2 \nmid k}}^n \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}.$$

Die Koeffizienten sind alle positiv. Setzen wir dann sukzessive $n = 4, 6, 8, \dots$, so folgt demnach mit $B_3 = 0$ induktiv, dass jeder Summand und damit insbesondere alle Bernoulli-Zahlen mit ungeradem Index größer 1 den Wert 0 haben. \square

2. Die Euler'sche Summenformel

Wir beginnen, indem wir die Bernoulli-Polynome auf $[0, 1)$ periodisch auf \mathbb{R} fortsetzen (siehe Abb. 2).

Definition 3. Es bezeichne $P_n(x) := B_n(x - [x])$ die periodische Fortsetzung des n -ten Bernoulli-Polynoms, wobei $[x] := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$ die Gaußklammer.

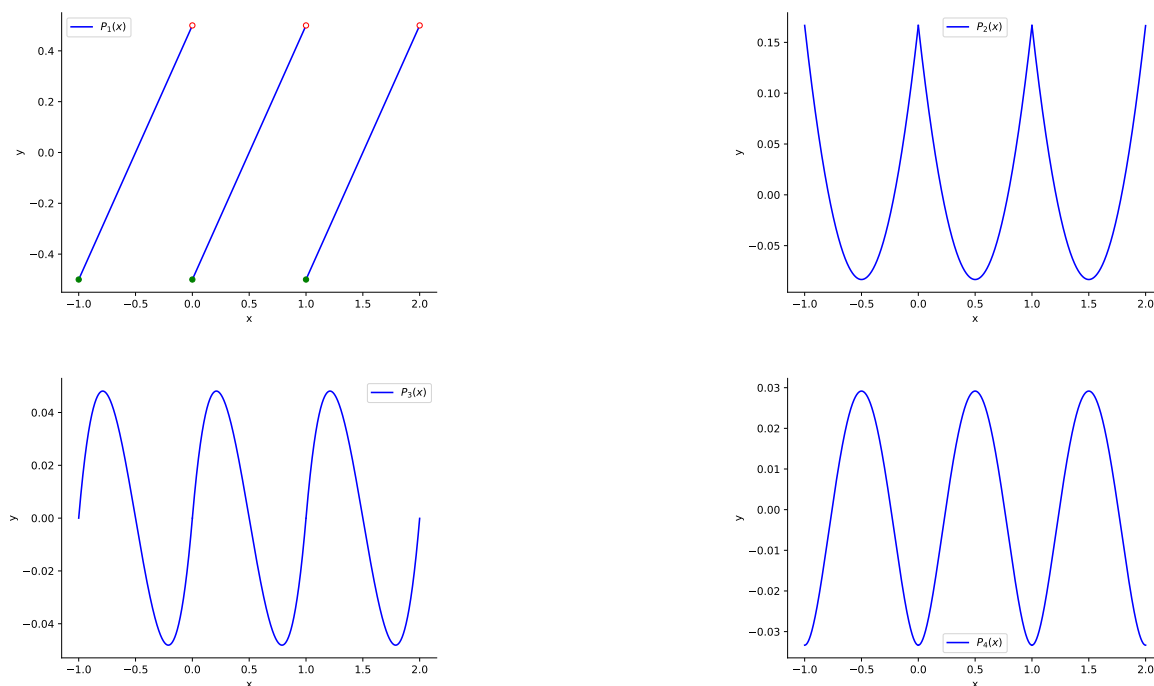


Abbildung 16: Die periodischen Fortsetzungen der Bernoulli-Polynome für $n = 1, 2, 3, 4$

Im folgenden Satz wird die Konvention genutzt, dass eine Summe, bei der die obere Laufindexgrenze kleiner als die untere ist, leer ist und den Wert 0 erhält.

Satz 2 (Euler'sche Summenformel). Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $f : [0, n] \rightarrow \mathbb{R}$ eine mindestens m -mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt:

$$\sum_{k=0}^n f(k) = \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{2}(f(0) + f(n)) + \sum_{k=2}^m \frac{(-1)^k B_k}{k!} f^{(k-1)}(x) \Big|_{x=0}^n + R_m, \quad (5)$$

wobei $R_m := \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_0^n f^{(m)}(x) P_m(x) dx$.

Beweis: (I) Sei $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Wir wollen eine nahrhafte 1 anwenden, indem wir die auf $[k, k+1]$ geltende Formel $P'_1 \equiv P_0 \equiv 1$ nutzen. Dann wenden wir partielle Integration an.

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} f(x) dx &= \int_k^{k+1} f(x) P'_1(x) dx = \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_k^{k+1-\epsilon} f(x) P'_1(x) dx \\ &= \lim_{\epsilon \searrow 0} \left(f(x) \cdot P_1(x) \Big|_{x=k}^{k+1-\epsilon} - \int_k^{k+1-\epsilon} f'(x) P_1(x) dx \right) \\ &= \lim_{\epsilon \searrow 0} \left(f(k+1-\epsilon) P_1(k+1-\epsilon) - f(k) P_1(k) - \int_k^{k+1-\epsilon} f'(x) P_1(x) dx \right) \\ &= \frac{1}{2}(f(k+1) + f(k)) - \int_k^{k+1} f'(x) P_1(x) dx \end{aligned}$$

Damit können wir die obige Gleichung für $k = 0, 1, \dots, n-1$ aufsummieren.

$$\begin{aligned} \int_0^n f(x) dx &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (f(k+1) + f(k)) - \int_0^n f'(x) P_1(x) dx \\ &= \frac{1}{2}(f(0) + f(n)) + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \int_0^n f'(x) P_1(x) dx \end{aligned}$$

Durch Addition von $\frac{1}{2}(f(0) + f(n))$ auf beiden Seiten und Umstellen folgt die Behauptung.

(II) Nun verbleibt noch zu zeigen, dass $R_1 = S_m + R_m$ mit $S_m := \sum_{k=2}^m \frac{(-1)^k B_k}{k!} f^{(k-1)}(x) \Big|_{x=0}^n$. Dies ist lediglich die Formel für m -fache partielle Integration (PI) und kann induktiv bewiesen werden. Zunächst setzen wir $m = 2$. Dann ist die Gleichung mit dem gleichen Aufspaltungs- und Grenzwerttrick wie gerade eben (s. oben)

$$\int_0^n f'(x) P_1(x) dx \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} f'(x) P_2(x) \Big|_{x=0}^n - \frac{1}{2} \int_0^n f''(x) P_2(x) dx = \sum_{k=2}^2 \frac{(-1)^k B_k}{k!} f^{(k-1)}(x) \Big|_{x=0}^n + R_2.$$

Der Induktionsschritt verläuft analog. Die Formel gelte für m . Zunächst wollen wir jedoch eine Erweiterung von (E1) feststellen.

$$g(x) P_m(x) \Big|_{x=0}^n = g(n) P_m(n) - g(0) P_m(0) = g(n) P_m(0) - g(0) P_m(0) = B_m g(x) \Big|_{x=0}^n \quad (6)$$

Unter Verwendung dieser Eigenschaft sind die nachfolgenden Umformungen elementar, denn P_n ist für $n \geq 2$ stetig.

$$\begin{aligned}
 R_1 \stackrel{\text{I.V.}}{=} S_m + R_m &= S_m + \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_0^n f^{(m)}(x) P_m(x) dx \\
 \stackrel{\text{PI}}{=} S_m + \frac{(-1)^{m+1}}{m!} &\left(\frac{1}{m+1} f^{(m)}(x) P_{m+1}(x) \Big|_{x=0}^n - \frac{1}{m+1} \int_0^n f^{(m+1)}(x) P_{m+1}(x) dx \right) \\
 &= S_m + \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m)}(x) P_{m+1}(x) \Big|_{x=0}^n + \frac{(-1)^{m+2}}{(m+1)!} \int_0^n f^{(m+1)}(x) P_{m+1}(x) dx \\
 \stackrel{\text{Gl.6}}{=} \sum_{k=2}^m \frac{(-1)^k B_k}{k!} &f^{(k-1)}(x) \Big|_{x=0}^n + \frac{(-1)^{m+1} B_{m+1}}{(m+1)!} f^{(m)}(x) \Big|_{x=0}^n + R_{m+1} = S_{m+1} + R_{m+1}
 \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis per Induktion beendet. □

Bemerkung 2. Für $m = 1$ erhalten wir die sogenannte *einfache Euler'sche Summenformel*, die die Gestalt

$$\sum_{k=0}^n f(k) = \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{2}(f(0) + f(n)) + R_1 \tag{7}$$

hat. Hier fällt der Summenterm auf der rechten Seite weg.

3. Anwendungen der Euler'schen Summenformel

Die Euler'sche Summenformel hat vielseitige Anwendungen, die wir in diesem Abschnitt an vier grundlegenden Beispielen demonstrieren werden. Dafür setzen wir leicht integrier- oder differenzierbare Funktionen für f ein und vereinfachen jeweils das Resultat.

3.1. Faulhaber'sche Formel

Für $n \in \mathbb{N}$ gelten die folgenden Summenformeln.

$$\begin{aligned}
 1^1 + 2^1 + 3^1 + 4^1 + \dots + n^1 &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \\
 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \\
 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 + 0n
 \end{aligned}$$

Es stellt sich direkt die Frage, ob für die Summen der Form $\sum_{k=1}^n k^p$ eine allgemeine Formel neben der bereits im Korollar 1 gezeigten existiert. Diese Frage wird mit dem nächsten Satz affirmiert.

Satz 3 (Faulhaber'sche Formel). *Für $n, p \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\sum_{k=1}^n k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} (-1)^k B_k \cdot n^{p+1-k}.$$

Beweis: Wir wenden die Euler'sche Summenformel (Satz 2) auf $f(x) = x^p$ und $m = p$ an. Dazu betrachten wir zuerst folgende Ableitungen:

$$\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} x^p \cdot \frac{1}{k!} = \frac{p!}{(p-k+1)!k!} \cdot x^{p-k+1} = \frac{1}{p+1} \cdot \binom{p+1}{k} \cdot x^{p-k+1}.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^p &= \sum_{k=0}^n f(k) \\ &= \int_0^n x^p dx + \frac{1}{2}(0^p + n^p) + \sum_{k=2}^p \frac{(-1)^k B_k}{k!} f^{(k-1)}(x) \Big|_{x=0}^n + \frac{(-1)^{p+1}}{p!} \int_0^n f^{(p)}(x) P_p(x) dx \\ &= \frac{x^{p+1}}{p+1} \Big|_{x=0}^n + \frac{1}{2} n^p + \sum_{k=2}^p \frac{(-1)^k B_k}{p+1} \binom{p+1}{k} \cdot x^{p+1-k} \Big|_{x=0}^n + (-1)^{p+1} \underbrace{\int_0^n P_p(x) dx}_0 \\ &= \underbrace{\frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{1}{2} n^p}_{\text{Summanden für } k=0 \text{ und } k=1} + \sum_{k=2}^p \frac{(-1)^k B_k}{p+1} \binom{p+1}{k} \cdot n^{p+1-k} \\ &= \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} (-1)^k B_k \cdot n^{p+1-k}. \end{aligned}$$

□

3.2. Die Euler-Mascheroni-Konstante

Für $n \in \mathbb{N}$, setzen wir $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, die n -te harmonische Zahl. Dann betrachten wir $x_n := H_n - \ln(n)$. Wie wir noch unten beweisen werden, konvergiert diese Folge. Den Grenzwert $\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \approx 0,577$ bezeichnet man als Euler-Mascheroni-Konstante.

Satz 4. x_n konvergiert.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass x_n monoton fallend und beschränkt ist.

Monotonie Wir führen die Aussage auf ein Resultat aus der Schule zurück. Es gilt:

$$x_n \geq x_{n+1} \iff \ln(n+1) - \ln(n) \geq H_{n+1} - H_n \iff \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{n+1}.$$

Nachfolgend verwenden wir das Resultat, dass $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ von oben gegen e konvergiert. Dazu multiplizieren wir beide Seiten mit $n+1$ und erhalten:

$$(n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}_{\geq e}\right) \geq 1.$$

Beschränktheit

$$x_n = H_n - \ln n = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{x} dx = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \right) dx}_{\geq 0} \geq 0$$

□

Die bereits angegebene Grenzwertformel zur Berechnung von γ ist praktisch nicht brauchbar, da x_n extrem langsam konvergiert: Selbst x_{1000} hat nur drei richtige Nachkommastellen. Daher wollen wir eine bessere Berechnungsmethode herleiten.

Satz 5. Für $m \geq 1$ gelten die folgenden Gleichungen:

$$(G1) \quad \gamma = \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^m \frac{B_k}{k} - \int_1^{\infty} \frac{P_m(x)}{x^{m+1}} dx,$$

$$(G2) \quad \gamma = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n) - \frac{1}{2n} + \sum_{k=2}^m \frac{B_k}{k \cdot n^k} - \int_n^{\infty} \frac{P_m(x)}{x^{m+1}} dx.$$

Beweis:

(Zu G1) Wir vermerken zunächst, dass für $f(x) := \frac{1}{x+1}$ gilt:

$$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}, \quad f''(x) = \frac{2!}{(x+1)^3}, \quad f'''(x) = \frac{-3!}{(x+1)^4}, \quad \dots, \quad f^{(k-1)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(x+1)^k}.$$

Es gilt demnach unter Anwendung der Euler'schen Summenformel

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &= \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \\ &= \int_0^{n-1} f(x) dx + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \sum_{k=2}^m \frac{(-1)^k B_k (-1)^{k-1} (k-1)!}{k! (x+1)^k} \Big|_{x=0}^{n-1} \\ &\quad + \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_0^{n-1} P_m(x) \frac{(-1)^m m!}{(x+1)^{m+1}} dx. \\ \Rightarrow H_n - \ln n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \sum_{k=2}^m \frac{B_k}{k \cdot n^k} + \sum_{k=2}^m \frac{B_k}{k} - \int_1^n \frac{P_m(x)}{x^{m+1}} dx. \quad (*) \end{aligned}$$

Führen wir bei dieser Gleichung jetzt den Grenzwertübergang $n \rightarrow \infty$ durch, so erhalten wir die Formel.

(Zu G2) Wir spalten das Integral des letzten Resultats auf und erhalten

$$\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^m \frac{B_k}{k} - \int_1^{\infty} \frac{P_m(x)}{x^{m+1}} dx = \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^m \frac{B_k}{k} - \int_1^n \frac{P_m(x)}{x^{m+1}} dx - \int_n^{\infty} \frac{P_m(x)}{x^{m+1}} dx,$$

und ersetzen nun das erste Integral durch die Gleichung (*) des obigen Abschnitts:

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^m \frac{B_k}{k} + H_n - \ln n - \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} + \sum_{k=2}^m \frac{B_k}{k \cdot n^k} - \sum_{k=2}^m \frac{B_k}{k} - \int_n^\infty \frac{P_m(x)}{x^{m+1}} dx \\ &= H_n - \ln n - \frac{1}{2n} + \sum_{k=2}^m \frac{B_k}{k \cdot n^k} - \int_n^\infty \frac{P_m(x)}{x^{m+1}} dx.\end{aligned}$$

□

Man kann zeigen, dass die Bernoulli-Polynome auf $[0, 1)$ und damit die periodischen Bernoulli-Polynome auf ganz \mathbb{R} nach oben beschränkt sind durch $|P_m(x)| \leq \frac{4m!}{(2\pi)^m}$ für $m \geq 1$. Dies macht Abschätzungen des letzten Integrals möglich, denn es gilt:

$$\left| \int_n^\infty \frac{P_m(x)}{x^{m+1}} dx \right| \leq \int_n^\infty \frac{|P_m(x)|}{x^{m+1}} dx \leq \frac{4m!}{(2\pi)^m} \int_n^\infty \frac{1}{x^{m+1}} dx = \frac{4m!}{(2\pi)^m \cdot m \cdot n^m}. \quad (8)$$

Beispiel 3. Wir wollen γ annähern. Dafür wählen wir in (G2) die Parameter $m = 3$ und $n = 10$ und erhalten $\gamma = 0,5772165 + \delta$, wobei der Fehler δ der Formel, der durch das Integral entsteht, dann beschränkt ist durch $3,23 \cdot 10^{-5}$. Somit ist unser Ergebnis $0,5772165$ zu mindestens drei Nachkommastellen korrekt, tatsächlich sind es sogar fünf richtige Stellen.

3.3. Die Stirling'sche Formel

Definition 4. Seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei reelle Zahlenfolgen, wobei $y_n, x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann heißen $(x_n), (y_n)$ *asymptotisch gleich* für $n \rightarrow \infty$, man schreibt kurz $x_n \sim y_n$, genau dann, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 1.$$

Beispiel 4. Wir betrachten $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, $y_n := \ln n$ und stellen fest, dass $H_n \sim y_n$, da $H_n - y_n$ wegen der Konvergenz beschränkt ist, und die Folge y_n monoton wachsend und unbeschränkt ist.

Wir untersuchen nun die Folge $x_n := n! = \prod_{k=1}^n k$.

Satz 6 (Stirling'sche Formel). *Es gilt*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Beweis: Wir wenden die Euler'sche Summenformel mit $m = 3$ auf $f(x) := \ln(x+1)$ an. Es gilt dann:

$$\begin{aligned}\ln(n!) &= \sum_{k=1}^n \ln(k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \\ &\stackrel{\text{Satz 2}}{=} \int_0^{n-1} f(x) dx + \frac{1}{2}(f(0) + f(n-1)) + \frac{B_2}{2} f'(x) \Big|_{x=0}^{n-1} + \frac{1}{3!} \int_0^{n-1} f^{(3)}(x) \cdot P_3(x) dx \\ &= [x \cdot \ln(x) - x]_{x=1}^n + \frac{1}{2} \ln(n) + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{x+1} \Big|_0^{n-1} + \frac{1}{3} \cdot \int_1^n \frac{1}{x^3} P_3(x) dx \\ &= n \ln(n) - n + 1 + \frac{1}{2} \ln(n) + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} - 1\right) + \frac{1}{3} \int_1^n \frac{P_3(x)}{x^3} dx.\end{aligned}$$

Wir erhalten also die Formel

$$\underbrace{\ln(n!) - n \ln(n) + n - \frac{1}{2} \ln(n)}_{=: s_n} = \frac{11}{12} + \frac{1}{12n} + \frac{1}{3} \int_1^n \frac{P_3(x)}{x^3} dx. \quad (9)$$

Wir sehen an der obigen Formel, dass s_n konvergiert, das heißt es existiert ein Grenzwert $s \in \mathbb{R}$, so dass $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. Somit gilt:

$$e^s = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{s_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\ln(n!)} \cdot e^n}{e^{n \ln(n)} \cdot e^{\frac{1}{2} \ln(n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot e^n}{n^n \cdot \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n}.$$

Dies vollendet den Beweis, wenn wir bekanntgeben, dass $e^s = \sqrt{2\pi}$ ist. \square

Mit der Stirling'schen Formel, kann man oft das Wachstum einer divergenten Folge mit dem Wachstum von $n!$ vergleichen.

Beispiel 5. Für gewöhnlich ist der folgende Grenzwert sehr aufwendig zu berechnen, mit der Stirling'schen Formel wird es erheblich vereinfacht.

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} &= \left(\frac{n!}{n^n} \cdot \frac{\sqrt{n2\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{n2\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n} \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{\sqrt{n2\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{n^n} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{n!}{\sqrt{n2\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n} \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \underbrace{\frac{2n\sqrt{2\pi n}}{e}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e}} \cdot \underbrace{\left(\frac{n!}{\sqrt{n2\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n} \right)^{\frac{1}{n}}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1} \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n!}{n^n} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Wir können die Gleichung (9) auch benutzen, um $n!$ tatsächlich näherungsweise zu bestimmen. Wir wissen, dass gilt:

$$\begin{aligned} s_n &= \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) + n = \frac{11}{12} + \frac{1}{12n} + \frac{1}{3} \int_1^n \frac{P_3(x)}{x^3} dx, \\ s &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{11}{12} + \frac{1}{3} \int_1^\infty \frac{P_3(x)}{x^3} dx = \ln(\sqrt{2\pi}). \end{aligned}$$

Es ist also $s_n = s + F_n$ mit einem Fehlerterm $F_n := \frac{1}{12n} - \frac{1}{3} \int_n^\infty \frac{P_3(x)}{x^3} dx$. Der Fehlerterm kann abgeschätzt werden durch $|F_n| \leq \frac{1}{12n} + \frac{1}{120n^2}$, da $|P_3(x)| \leq \frac{1}{20}$ für alle $x \in [0, 1]$. Mit anderen Worten gilt demnach

$$\ln n! = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) - n + \ln(\sqrt{2\pi}) + F_n. \quad (10)$$

Mit der Feststellung $\log(x) = M \cdot \ln(x)$ mit $M = \log(e)$ lässt sich Gleichung (10) noch in eine praktischere Formel umformen:

$$\log n! = \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n - Mn + \log \sqrt{2\pi} + M \cdot F_n. \quad (11)$$

Beispiel 6. Wir wollen $1000!$ berechnen. Daran scheitert jeder gewöhnliche Taschenrechner, doch mit unserer Formel kann $\log 1000!$ angenähert werden. Man erhält $\log 1000! \approx 2567,604608$. Der Fehler ist dabei kleiner als $|M \cdot F_{1000}| \leq 3,62 \cdot 10^{-5}$. Durch Exponentieren folgt nun, dass $1000!$ eine 2568-stellige Zahl ist, die mit den Ziffern 402 beginnt.

3.4. Die Riemann'sche Zetafunktion

Satz 7. Für alle $s > 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} - s \cdot \int_1^{\infty} \frac{P_1(x)}{x^{s+1}} dx. \quad (12)$$

Beweis: Sei $s > 1$ gegeben. Wir erhalten nach Anwendung der einfachen Euler'schen Summenformel mit $f(x) := \frac{1}{(x+1)^s}$ und $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} &= \sum_{k=0}^{n-1} f(k) = \int_0^{n-1} \frac{1}{(x+1)^s} dx + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n^s}\right) - s \cdot \int_0^{n-1} \frac{P_1(x)}{(x+1)^{s+1}} dx \\ &= \frac{1}{1-s} \left(\frac{1}{n^{s-1}} - 1\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n^s}\right) - s \cdot \int_1^n \frac{P_1(x)}{x^{s+1}} dx. \end{aligned}$$

Nach Übergang zum Grenzwert für $n \rightarrow \infty$ folgt die Behauptung. □

Bemerkung 3. Die linke Seite der Gleichung (12) entspricht für $s > 1$ per Definition der Riemann'schen Zetafunktion. Dabei entsteht die Einschränkung dadurch, dass die Reihe für $s \leq 1$ nicht konvergiert. Wir sehen also, dass obiger Satz eine alternative Darstellung der Zetafunktion liefert für $s > 1$. Unsere Herleitung für diese Formel funktioniert zwar in ihrer aktuellen Form nur für $s > 1$, man kann jedoch völlig analog auch zeigen, dass die Formel in der komplexen Ebene für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re(s) > 1$ gilt. Überdies existiert das Integral in (12) aber auch für $s > 0$ (bzw. $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re(s) > 0$). Nach einem Satz aus der Funktionentheorie sind für jede hinreichend gutartige Funktion alle solchen Bereichserweiterungen gleichwertig, d.h. auf dem Schnitt ihrer Definitionsbereiche identisch. Demnach ist die Funktion $\tilde{\zeta}$ mit $\tilde{\zeta}(s) := \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} - s \cdot \int_1^{\infty} \frac{P_1(x)}{x^{s+1}}$ für positive $s \neq 1$ eine „valide Bereichserweiterung“ der Zetafunktion; man spricht von einer analytischen Fortsetzung. Vewendet man schließlich die allgemeine Euler'sche Summenformel mit $m \in \mathbb{N}$, dann kann man die Riemann'sche Zetafunktion weiter fortsetzen und für $s > 1 - m$, $s \neq 1$ definieren.