

Fraktale

Teilnehmende:

- 1 Teilnehmer des
- 2 Teilnehmende des
- 1 Teilnehmer des
- 3 Teilnehmende des

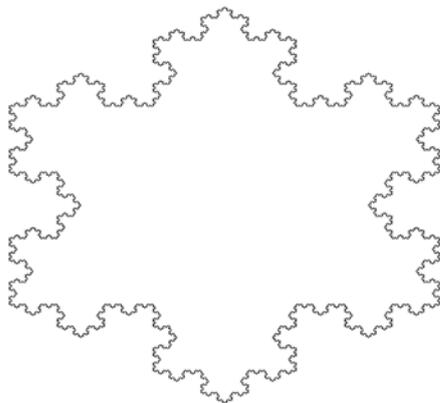
mit tatkräftiger Unterstützung durch:
Catrin Heubel

Gruppenleiter:
Andreas Filler

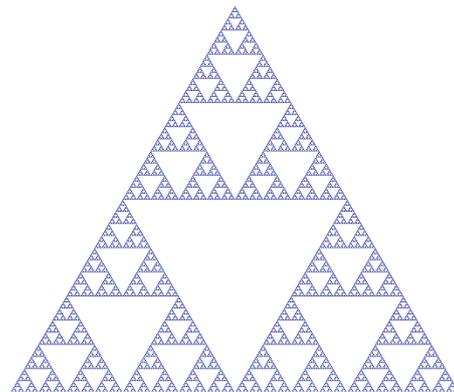
Heinrich-Hertz-Gymnasiums
Herder-Gymnasiums
Immanuel-Kant-Gymnasiums
Käthe-Kollwitz-Gymnasiums

Humboldt-Universität zu Berlin

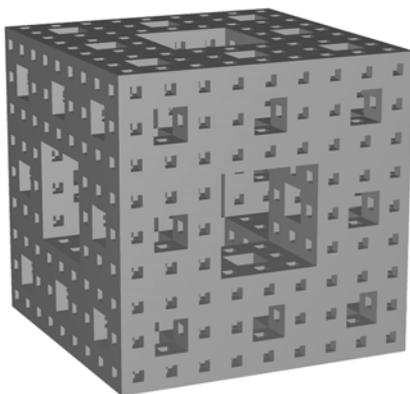
Humboldt-Universität zu Berlin



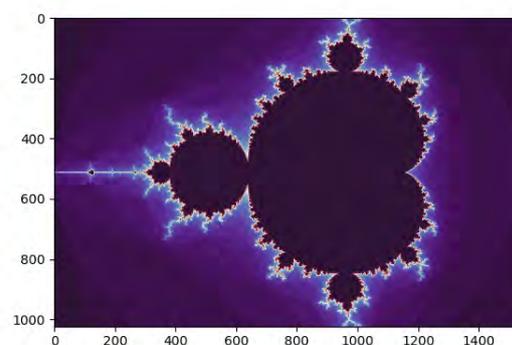
Kochsche Schneeflocke



Sierpinski-Dreieck



Menger-Schwamm



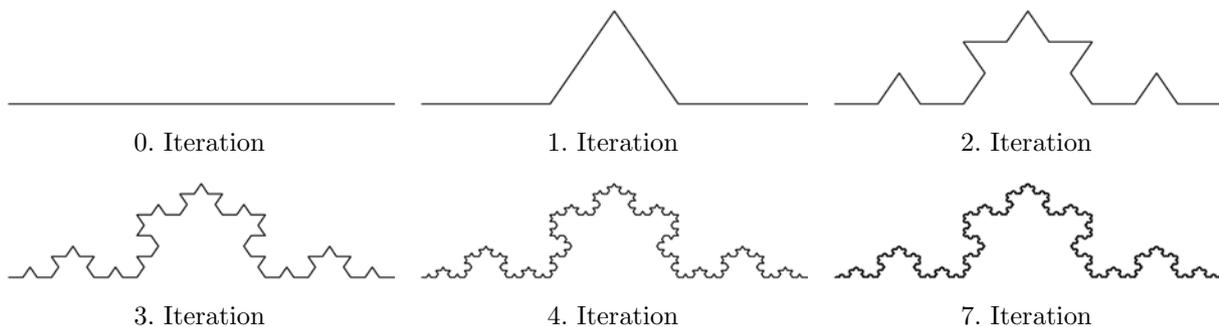
Mandelbrot-Menge

1. Die Koch-Kurve

Die Koch-Kurve ist ein typisches Beispiel für ein selbstähnliches Fraktal. Sie stellt eine nirgendwo differenzierbare, jedoch überall stetige Kurve dar. Im Folgenden wurde immer die Koch-Kurve, die mit einer Einheitsstrecke ($l = 1$) startete, betrachtet.

1.1. Generieren der Koch-Kurve

1. Die Einheitsstrecke wird in drei gleich große Teile geteilt.
2. Die mittlere Drittelstrecke wird entfernt und durch zwei Drittelstrecken ersetzt, sodass ein gleichseitiges Dreieck entsteht.
3. Schritt 1 und 2 werden unendlich oft mit den Drittelstrecken wiederholt.



1.2. Die Länge der Koch-Kurve

Die Länge der Koch-Kurve nach n Iterationsschritten kann mit der folgenden Vorschrift berechnet werden:

$$l_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

Mit jedem Iterationsschritt wird die Koch-Kurve länger, sodass sie unendlich lang wird:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty.$$

1.3. Der Flächeninhalt unter der Koch-Kurve

Der Flächeninhalt unter der Koch-Kurve nach n Iterationsschritten kann mit der folgenden Vorschrift berechnet werden:

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{4}{9}\right)^i.$$

Im Gegensatz zur Länge der Koch-Kurve ist der Flächeninhalt unter der Kurve endlich. Um das Summenzeichen aufzulösen, kann die Eigenschaft einer geometrischen Reihe benutzt werden, also $\sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{1 - q^n}{1 - q}$.

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{4}{9}\right)^i = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1 - 0}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{20} \approx 0,78$$

Der Flächeninhalt unter der Koch-Kurve mit der Ausgangsstrecke der Länge $l = 1$ beträgt etwa 0,78.

1.4. Die Kochsche Schneeflocke

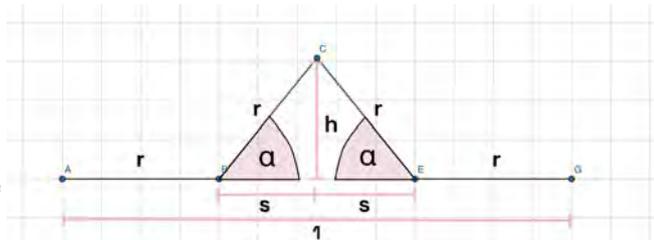
Wenn die Iteration nicht mit der Einheitsstrecke, sondern mit einem gleichseitigen Dreieck beginnt, bildet sich die Kochsche Schneeflocke, die auf der ersten Seite dieses Berichts zu sehen ist. Diese besteht aus drei Koch-Kurven. Demnach hat die einen endlichen Flächeninhalt, jedoch eine unendliche Länge. Allerdings ist die Selbstähnlichkeit nicht mehr gegeben.

2. Die Cesaro-Kurve

Bei dem Fraktal mit dem Namen „Cesaro-Kurve“ handelt es sich um eine verallgemeinerte Form der Koch-Kurve. Im Umkehrschluss ist die Koch-Kurve ein Spezialfall der Cesaro-Kurve. Die Cesaro-Kurve ist durch den **Winkel** α und die Länge der **Grundstrecke** l definiert. (Für die Koch-Kurve gilt $\alpha = 60^\circ$.)

Für die nebenstehende Grafik sind folgende Ausdrücke von Bedeutung:

- α : Winkel
- r : Länge einer Teilstrecke
- h : Höhe des gleichschenkligen Dreiecks
- $2 \cdot s$: Basis des gleichschenkligen Dreiecks
- s, h : Katheten der rechtwinkligen Dreiecke
- l : Länge der Grundstrecke (hier $l = 1$)



2.1. Bestimmung von h , s und r

Die Längen der Strecken r , s und h hängen nur vom Winkel α ab. Da das Dreieck ein gleichschenkliges Dreieck ist, welches aus zwei rechtwinkligen Dreiecken besteht, können h und s mithilfe des Kosinus und Sinus ausgerechnet werden. Man erhält für s :

$$\cos \alpha = \frac{s}{r} \Leftrightarrow s = \cos \alpha \cdot r$$

Die Länge der Strecke h kann gleichermaßen errechnet werden:

$$\sin \alpha = \frac{h}{r} \Leftrightarrow h = \sin \alpha \cdot r$$

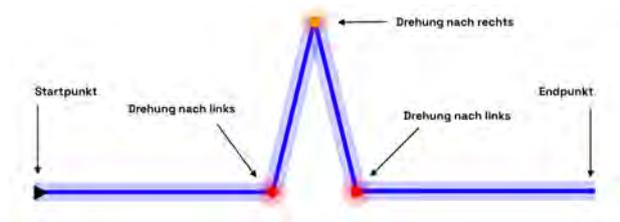
Des Weiteren wissen wir, dass $1 = 2s + 2r$ gelten muss, da die Cesaro-Kurve aus einer Einheitsstrecke mit der Länge 1 gebildet wurde. Wenn man nun $s = \cos \alpha \cdot r$ einsetzt und nach r umstellt, kommt man auf die folgende Formel für r in Abhängigkeit von α :

$$1 = 2r + 2r \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow r = \frac{1}{2 \cdot (1 + \cos \alpha)}$$

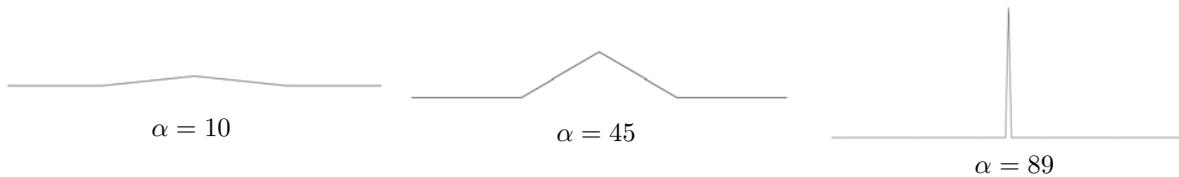
2.2. Anschauliche Bildungsvorschrift

Mit dem folgenden Algorithmus lässt sich eine Cesaro-Kurve mithilfe eines Computers angenähert zeichnen.

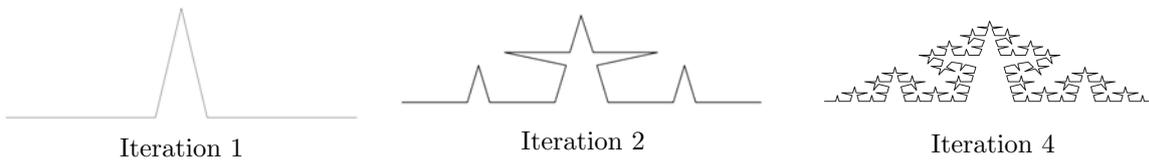
1. Startpunkt wählen
2. r -Schritte vorwärts gehen (Abkürzung: F)
3. Um α nach links drehen (Abkürzung: L)
4. r -Schritte vorwärts gehen (Abkürzung: F)
5. Um $2 \cdot \alpha$ nach rechts drehen (Abkürzung: R)
6. r -Schritte vorwärts gehen (Abkürzung: F)
7. Um α nach links drehen (Abkürzung: L)
8. r -Schritte vorwärts gehen (Abkürzung: F)
9. Endpunkt erreicht



Cesaro-Kurve mit $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$ nach der 1. Iteration



Cesaro-Kurve mit $\alpha = 80^\circ$ über die Iterationen



2.3. Herleitung der Streckenlänge

Mit jedem Iterationsschritt wird die Länge von r verkleinert, jedoch erhöht sich gleichzeitig die Anzahl der Strecken. Nach unendlich vielen Iterationsschritten das Fraktal ebenfalls unendlich lang.

i	Anzahl der Teilstrecken	Länge der Teilstrecken	Gesamtlänge
1	1	$r(i, \alpha)$	$1 \cdot r$
1	4	$r(i, \alpha)$	$4 \cdot r$
3	16	$r(i, \alpha)$	$16 \cdot r$
n	4^n	$r(n, \alpha)$	$4^n \cdot r$

2.4. Berechnen des Flächeninhalts

Ausgehend von der ersten Iteration kann man den Flächeninhalt unter der Kurve mit $s \cdot h$ berechnen, da die neuen Dreiecke immer gleichschenkelig sind. Demnach beträgt der Flächeninhalt für ein Dreieck:

$$A = \frac{\cos \alpha \cdot \sin \alpha}{2 \cdot (1 + \cos \alpha)^2}$$

In jedem Iterationsschritt kommen 4^{n-1} neue Dreiecke dazu, welche jeweils um den Faktor $2(1 + \cos \alpha)$ verkleinert werden. Diese Flächen werden nun addiert.

i	Anzahl neuer Dreiecke	Flächeninhalt neuer Dreiecke	Flächenzuwachs
0	0	0	0
1	1	$\frac{\cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)}{4 \cdot (1 + \cos(\alpha))^2}$	$1 \cdot \frac{\cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)}{4 \cdot (1 + \cos(\alpha))^2}$
2	4	$\frac{\cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)}{16 \cdot (1 + \cos(\alpha))^4}$	$4 \cdot \frac{\cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)}{16 \cdot (1 + \cos(\alpha))^4}$
n	4^{n-1}	$\frac{\cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)}{4^n \cdot (1 + \cos(\alpha))^{2n}}$	$4^{n-1} \cdot \frac{\cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)}{4^n \cdot (1 + \cos(\alpha))^{2n}}$

Somit kann die Gesamtfläche für die Cesaro-Kurve, abhängig von α , folgendermaßen beschrieben werden.

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)}{4 \cdot ((1 + \cos(\alpha))^2)^{i+1}}$$

Mithilfe der geometrischen Reihe kann nun der Grenzwert ausgerechnet werden.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)}{4 \cdot ((1 + \cos(\alpha))^2)^{i+1}} &= \frac{\cos \alpha \cdot \sin \alpha}{4(1 + \cos \alpha)^2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{((1 + \cos \alpha)^2)^n}}{1 - \frac{1}{(1 + \cos \alpha)^2}} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\cos \alpha \cdot \sin \alpha}{4(1 + \cos \alpha)^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{(1 + \cos \alpha)^2}} = \frac{\sin \alpha}{4 \cdot (\cos \alpha)^2} \end{aligned}$$

3. Das Sierpinski-Dreieck

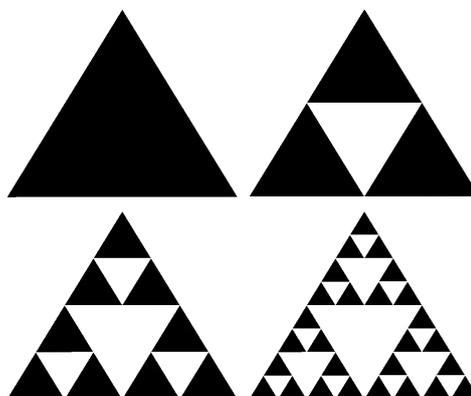
Das Sierpinski-Dreieck, welches auf der ersten Seite dieses Berichts (oben rechts) abgebildet ist, ist eines der berühmtesten Fraktale und weist Selbstähnlichkeit auf.

3.1. Konstruktion

Bei der Konstruktion dient meist ein gleichseitiges Dreieck als Initiator, also als Ausgangsdreieck. Aus diesem wird das Seitenmittendreieck ausgeschnitten. Dieser Schritt wird mit allen entstandenen Teildreiecken wiederholt.

3.2. Seitenlängen und Flächeninhalt

Das Ausgangsdreieck hat eine Gesamtseitenlänge $l_0 = 3 \cdot a$ und einen Flächeninhalt $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$. Gehen wir davon aus, dass $a = 1$ ist, dann gilt für Iteration 0, dass die Gesamtseitenlänge $l_0 = 3$ und der Flächeninhalt $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ist.



Konstruktionsanfang des Sierpinski-Dreiecks

Bei der 1. Iteration wird zur Gesamtseitenlänge $3 \cdot \frac{1}{2}$ addiert. Die neue Gesamtseitenlänge beträgt $3 \cdot \frac{1}{2} + 3$. Von der Ausgangsfläche wird ein Dreieck mit $\frac{1}{4}$ der Ausgangsfläche abgezogen, also gilt $A_1 = A_0 - \frac{1}{4} \cdot A_0$.

Bei der zweiten Iteration werden drei weitere Dreiecke mit jeweils einer Gesamtseitenlänge von $3 \cdot \frac{1}{4}$ addiert, sodass die neue Gesamtseitenlänge auf $3 \cdot \frac{3}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} + 3$ steigt. Die Flächeninhalte dieser Dreiecke sind jeweils um den Faktor 4 kleiner als die der vorherigen Dreiecke. Somit beträgt der neue Gesamtflächeninhalt $A_2 = A_1 - \frac{3}{16} \cdot A_0 = A_0 \cdot (1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{16})$. Für die Gesamtseitenlänge gilt, dass immer $\frac{3^n}{2^n}$ hinzuaddiert wird. Allgemein gilt demnach

$$a_n = 3 + \sum_{k=1}^n \frac{3^k}{2^k} = \frac{3^{n+1}}{2^n}.$$

Vom Flächeninhalt wird mit jedem Iterationsschritt eine Fläche von $3^{n-1} \cdot \frac{1}{4^n}$ subtrahiert. Somit entsteht insgesamt ein Flächeninhalt von

$$A_n = A_0 \cdot \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-1}}{4^k} \right) = \left(\frac{3}{4} \right)^n \cdot A_0.$$

Iteration	Längenzuwachs	Länge	Flächensubtraktion	Fläche
0	-	3	-	A_0
1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{4} \cdot A_0$	$\frac{3}{4} \cdot A_0$
2	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{4}$	$\frac{3}{16} \cdot A_0$	$\frac{9}{16} \cdot A_0$
n	$\frac{3^n}{2^n}$	$\frac{3^{n+1}}{2^n}$	$\frac{3^{n-1}}{4^n} \cdot A_0$	$(\frac{3}{4})^n \cdot A_0$

Somit gilt für die Gesamtseitenlänge $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{2^n} = \infty$ und für den Flächeninhalt $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{3}{4})^n \cdot A_0 = 0$.

4. Der Menger-Schwamm

Im Folgenden betrachten wir ein Fraktal im dreidimensionalen Raum, nämlich den bereits auf der ersten Seite dieses Berichts (unten links) nach der 3. Iteration abgebildeten Menger-Schwamm.

4.1. Konstruktion

Wir betrachten einen Einheitswürfel. Diesen teilen wir in $3^3 = 27$ kongruente Teilwürfel und entfernen die Teilwürfel, welche nicht an einer Kante des ursprünglichen Einheitswürfels anliegen. So entfernen wir insgesamt 7 der 27 Würfel. Dies können wir dann mit den anderen 20 in der nächsten Iteration wiederholen und machen dies theoretisch unendlich oft um unser Fraktal zu erzeugen.

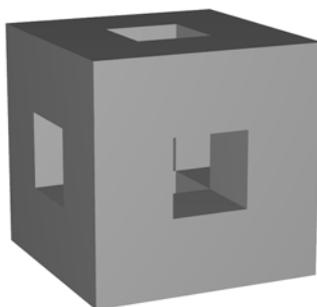
4.2. Volumen

Um das Volumen zu ermitteln, addieren wir die Volumina aller kleinsten Würfel und erhalten so unser Gesamtvolumen. Hierzu brauchen wir nur das Volumen eines der kleinsten Würfel und die Anzahl all dieser. Wir betrachten zunächst kleine n (n ist die Anzahl an Iterationen), um eine Formel herzuleiten.

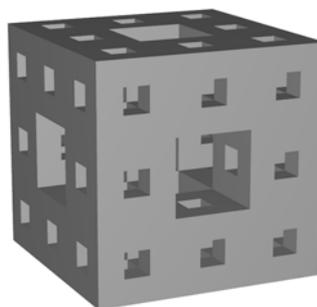
Wir haben für $n = 1$ insgesamt 27 Würfel. Davon entfernen wir aber sieben wieder. Somit betrachten wir 20 kleine Würfel. Das Volumen eines jeden dieser kleinen Würfel beträgt $\frac{1}{27}$. Somit erhalten wir ein Gesamtvolumen von $20 \cdot \frac{1}{27}$.

Nun betrachten wir dies für $n = 2$. Hier sehen wir, dass die Anzahl der kleinsten Würfel in den Subwürfeln immer 20 entspricht. Um nun die Gesamtanzahl der kleinsten Würfel zu erhalten, multiplizieren wir, analog zu der Argumentation von oben, mit 20 (Anzahl der Subwürfel). Für $n = 2$ haben wir demnach 20^2 kleinste Würfel.

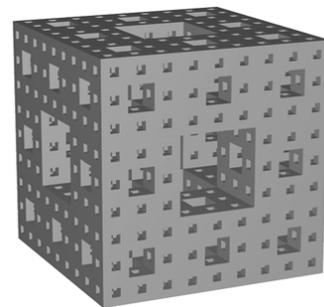
Allgemein beträgt die Anzahl der kleinsten Würfel in der n -ten Iteration 20^n und ihr Volumen jeweils $\frac{1}{27^n}$. So ergibt sich für das Gesamtvolumen $V(n) = (\frac{20}{27})^n$. Wenn wir den Grenzwert gegen Unendlich bilden, sehen wir, dass dieser Ausdruck gegen 0 geht, das heißt, das Volumen ist im Grenzwert 0.



1. Iteration



2. Iteration



3. Iteration

4.3. Oberflächeninhalt

Der Oberflächeninhalt eines Einheitswürfels beträgt 6 Flächeneinheiten. Nun schauen wir uns die erste Iteration an und ermitteln den Oberflächeninhalt. Dafür betrachten wir die Oberflächeninhalte der kleinsten Würfel. Diese betragen $6 \cdot \frac{1}{9}$. Natürlich müssen wir davon die sich überlappenden Flächen subtrahieren. Dabei gibt es zwei unterschiedliche Würfel: erstens sind das die Kantenwürfel, von denen gibt es zwölf, und zweitens die Eckwürfel, von welchen es acht gibt.

Bei den Kantenwürfeln sind zwei Flächen überlappt, daher sind $12 \cdot 2$ Flächen zu subtrahieren. Bei den Eckwürfeln überlappen sich mit den benachbarten Würfeln jeweils drei Flächen. Es müssen also weitere $8 \cdot 3$ Flächen subtrahiert werden. Somit ergibt sich folgende Formel für den Oberflächeninhalt für $n = 1$:

$$A(1) = \frac{1}{9} \cdot (20 \cdot 6 - 12 \cdot 2 - 8 \cdot 3).$$

Für $n = 2$ erfolgt die Argumentation analog, allerdings mit dem Unterschied, dass weitere Flächen der anderen Würfel bedeckt werden. Wir erhalten $\frac{1}{9^2} \cdot (20^2 \cdot 6 - 20 \cdot 12 \cdot 2 - 20 \cdot 8 \cdot 3)$. Hiervon müssen allerdings noch Überlappungsflächen subtrahiert werden, die in der zweiten Iteration dazugekommen sind. Hierzu betrachten wir wieder die größeren Eck- und Kantenwürfel. Es gibt zwölf Kantenwürfel. Von denen werden zwei Flächen entfernt und bei den Eckwürfeln werden drei Flächen entfernt. Beides muss noch mit 8 multipliziert werden, da die Würfel auf jeder Seite acht kleinere Flächen haben. So ergibt sich für $n = 2$ die vollständige Formel für den Oberflächeninhalt als:

$$A(2) = \frac{1}{9^2} \cdot (20^2 \cdot 6 - 20 \cdot 12 \cdot 2 - 20 \cdot 8 \cdot 3 - 12 \cdot 2 \cdot 8 - 8 \cdot 3 \cdot 8) = \frac{6}{9^2} \cdot (20^2 - 20 \cdot 8 - 8^2).$$

Nun können wir die Formel verallgemeinern, da der Vorgang in den nächsten Schritten wiederholt wird, nur mit mehr und kleineren Flächen. Somit erhalten wir die folgende Formel für den Oberflächeninhalt:

$$A(n) = \frac{6}{9^n} \cdot (20^n - 8 \cdot 20^{n-1} - 8^2 \cdot 20^{n-2} - \dots - 8^n) = \frac{6}{9^n} \cdot \left(20^n - \sum_{i=1}^n 8^i \cdot 20^{n-i} \right) = \frac{6 \cdot 20^n}{9^n} \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^n \left(\frac{2}{5} \right)^i \right).$$

Indem wir unendlich viele Iterationen durchführen, betrachten wir den Grenzwert. Aufgrund der Summenformel der geometrischen Reihe konvergiert $\sum_{i=1}^n \left(\frac{2}{5} \right)^i$. Der Ausdruck $\frac{6 \cdot 20^n}{9^n}$ divergiert gegen Unendlich. Deshalb ist es nicht von Bedeutung, wogegen die Summe konvergiert. Dies ändert nichts an der Divergenz.

Der Menger-Schwamm besitzt also die faszinierende Eigenschaft, dass das Volumen mit jeder Iteration kleiner und der Oberflächeninhalt größer wird. Für immer größer werdende n konvergiert das Volumen sogar gegen 0 und der Oberflächeninhalt wird unendlich groß.

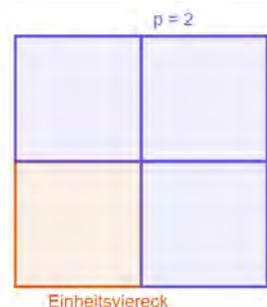
5. Fraktale Dimensionen

5.1. Üblicher Dimensionsbegriff

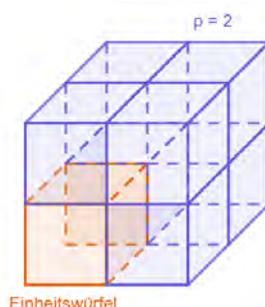
Häufig wird beim Begriff der Dimensionen in der Mathematik über die Anzahl der Koordinatenachsen gesprochen. Eine solche Auslegung ist allerdings nicht dazu geeignet, Fraktalen *sinnvolle* Dimensionen zuzuordnen. Stattdessen ist das Ziel, einen alternativen Begriff zu entwickeln, welcher nicht nur eine *sinnvolle* Beschreibung von Fraktalen in Bezug auf ihre Dimensionen ermöglicht, sondern sich gleichzeitig auch auf die bekannten ein-, zwei- und dreidimensionalen Körper widerspruchlos anwenden lässt.

Da das Fraktal Koch-Kurve lediglich aus einer Reihe verschiedener Teilstrecken besteht, ist es anfangs naheliegend, ihm die Dimension 1 zuzuordnen.

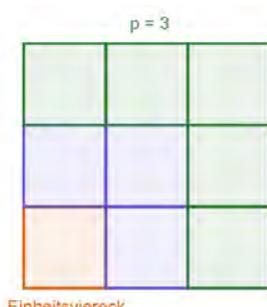
Sobald man allerdings anfängt, die Körper gleichermaßen in Bezug auf ihre Seitenlängen zu skalieren und sie anschließend ins Verhältnis mit ihrer ursprünglichen Größe setzt, tritt schnell ein abweichendes Verhalten im Vergleich zu den folgenden bekannten Körpern aus dem zwei- und dreidimensionalen Raum auf.



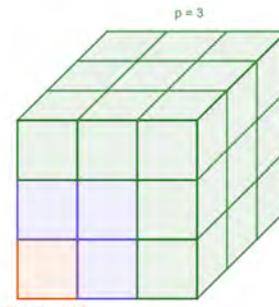
2D: $p = 2, N = 2^2 = 4$



3D: $p = 2, N = 2^3 = 8$



2D: $p = 3, N = 3^2 = 9$

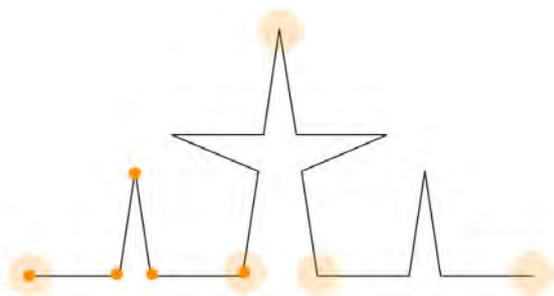


3D: $p = 3, N = 3^3 = 27$

5.2. Selbstähnlichkeit

Eine kompakte (abgeschlossene und beschränkte) Punktmenge G ist selbstähnlich, wenn sie in paarweise disjunkte, zueinander kongruente Teilmengen G_i zerlegt werden kann, sodass die G_i zu G ähnlich sind.

Bemerkung: Dann existiert ein Ähnlichkeitsfaktor p zwischen G_i und G mit $p > 1$, also dem Ähnlichkeitsfaktor mit dem G_i auf G abgebildet werden.



Die kleinen orangenen Punkte symbolisieren die Punktmenge G_i . Die großen orangenen Punkte symbolisieren eine der paarweise disjunkten, zueinander kongruenten Teilmengen G_i .

5.3. Selbstähnlichkeitsdimension

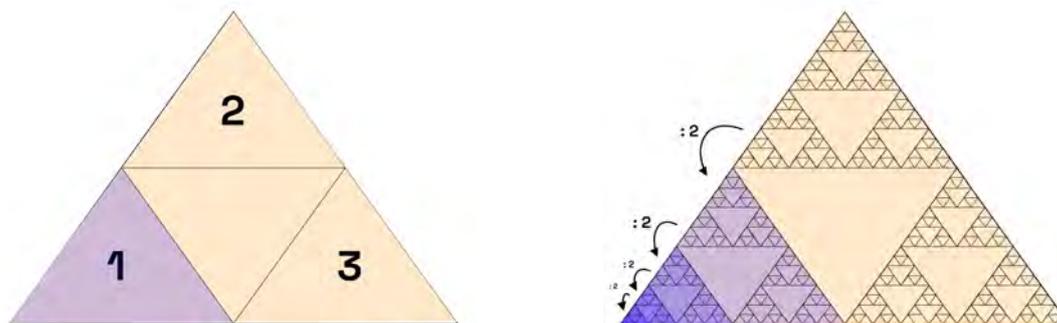
Es sei G eine selbstähnliche Punktmenge mit N kongruenten Zerlegungsmengen G_i und dem Streckfaktor p , also dem Ähnlichkeitsfaktor mit dem die Zerlegungsmengen G_i auf G abgebildet werden.

Als Selbstähnlichkeitsdimension bezeichnet man den Quotienten $d(G) = \frac{\log N}{\log p}$.

Beispiel 1. Mithilfe der Selbstähnlichkeitsdimension lassen sich nun Dimensionen für Fraktale annähern.

Anschaulich betrachten wir dafür die Anzahl N der neu entstandenen Teilobjekte (aus der nächsten Iteration $i + 1$) und das Verhältnis p der Größen. $p > 1$ (wie oben definiert) bedeutet, dass wir das Verhältnis zwischen der „größeren“ Version des Objekts zur „kleineren“ betrachten: Konkret wird das Größenverhältnis angegeben durch die Größe des Objekts der i -ten Iteration zur Größe des Objekts der Iteration $i + 1$.

Anhand der folgenden Abbildung wird für das Sierpinski-Dreieck deutlich, dass die Dreiecke in der Iteration $i + 1$ um die Hälfte kleiner werden ($p = 2$), allerdings drei neue Dreiecke zu zählen (Anzahl $N = 3$) sind.



Fraktal	α	N	p	d
Sierpinski-Dreieck		3	2	≈ 1.58
Menger-Schwamm		20	3	≈ 2.73
Koch-Kurve		4	3	≈ 1.26
Cesaro-Kurve	60°	4	3	≈ 1.26
Cesaro-Kurve	10°	4	≈ 3.97	≈ 1.01
Cesaro-Kurve	30°	4	≈ 3.73	≈ 1.05
Cesaro-Kurve	75°	4	≈ 2.52	≈ 1.50
Cesaro-Kurve	85°	4	≈ 2.17	≈ 1.78
Cesaro-Kurve	89°	4	≈ 2.03	≈ 1.95
Cesaro-Kurve	90°	4	2	2

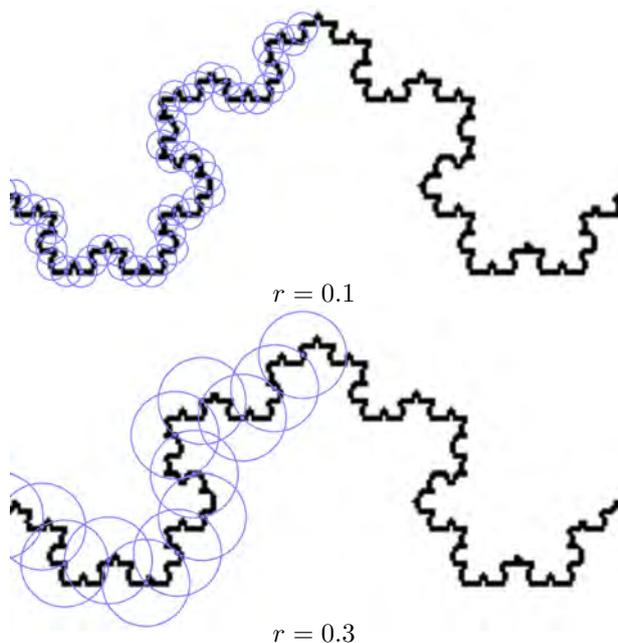
5.4. Yardstick-Dimension

Um die Länge eines Fraktals annähernd zu bestimmen, wird die Yardstick-Methode angewendet. Hierbei setzt man immer kleiner werdende Strecken mit der Länge R aneinander, um den Verlauf des Fraktals zu approximieren. Je kleiner diese Teilstrecken werden, desto genauer wird die Approximierung. Dabei ist $N(r)$ die Anzahl der benötigten Strecken, um das Fraktal „abzutragen“.

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \cdot N(r) = l,$$

wobei l die echte Länge des Fraktals ist.

Bei verschiedenen Radien erhält man verschiedene Messergebnisse.



r	$N(r)$	$L(r)$
0.1	505	50.5
0.15	273	40.95
0.3	136	40.8
0.5	65	32.5
1.0	32	32

Diese Werte können durch eine Potenzfunktion der Form $L(r) = c \cdot r^a$ approximiert werden. Wir wissen, dass eine Gerade eine konstante Funktion ist. Dementsprechend ist in diesem Fall $a = 0$. Da die Gerade die Dimension 1 besitzt, kann man die Dimension d als $d := 1 - a$ definieren.

Mithilfe der gemessenen Werte und der Trendlinienfunktion in Excel lässt sich $a \approx -0.191$ bestimmen. Daraus lässt sich folgern, dass das Fraktal eine Yardstick-Dimension von $d \approx 1.191$ besitzt.

Dies kann man auch exakt herausfinden.

$$\begin{aligned}
 L(r) = r \cdot N(r) &\Leftrightarrow r \cdot N(r) = c \cdot r^a \Leftrightarrow N(r) = c \cdot r^{a-1} = c \cdot r^{-d} \\
 &\Leftrightarrow \log N(r) = \log c + \log r^{-d} = \log c - d \cdot \log r \\
 &\Leftrightarrow d = -\frac{\log N(r) - \log c}{\log r} = -\frac{\log N(r)}{\log r} + \frac{\log c}{\log r} \\
 \lim_{r \rightarrow 0} \left(-\frac{\log N(r)}{\log r} + \frac{\log c}{\log r} \right) &= \lim_{r \rightarrow 0} -\frac{\log N(r)}{\log r}
 \end{aligned}$$

Für die Kochkurve (Anzahl Strecken: 4^n , Länge der Strecken: $\frac{1}{3^n}$) gilt:

$$\lim_{r \rightarrow 0} d = \lim_{n \rightarrow \infty} d = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 4^n}{\log \frac{1}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \log 4}{n \cdot \log 3} = \frac{\log 4}{\log 3}.$$

Dies ist die gleiche Dimension wie die Selbstähnlichkeitsdimension. Demnach sind beide Dimensionen miteinander verträglich.

6. Die Mandelbrot-Menge („Apfelmännchen“)

Die Mandelbrot-Menge ist die Menge aller komplexer Zahlen c , die bei der Folge mit der Vorschrift $z_{n+1} = (z_n)^2 + c$ beschränkt bleibt.

- $c = a + bi$
- $z_n = x_n + y_n \cdot i$

Durch Einsetzen in die Vorschrift erhält man:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c = (x_n + y_n)^2 + a + bi = x_n^2 - y_n^2 + 2x_ny_ni + a + bi.$$

Realteil x_{n+1} :

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a$$

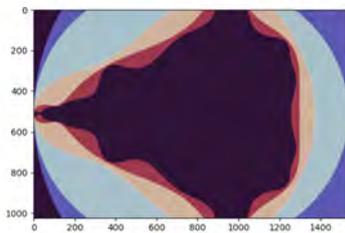
Imaginärteil y_{n+1} :

$$y_{n+1} = 2 \cdot x_n \cdot y_n + b$$

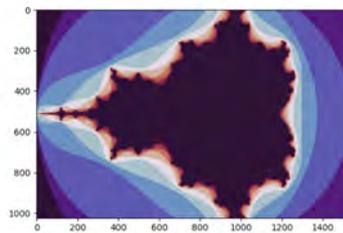
Markiert man alle c in der Mandelbrot-Menge im Koordinatensystem, so erhält man das „Apfelmännchen“ (siehe die Abbildungen unten). Das ist letztendlich ein Fraktal, wenn $n \rightarrow \infty$ Iterationen durchgeführt werden.

Die farbigen Abstufungen geben Informationen darüber, ob und wie schnell die Folge (in Abhängigkeit von c) divergiert.

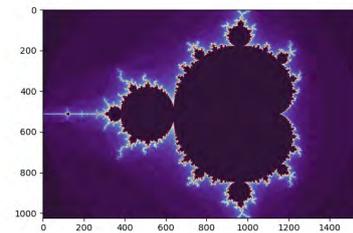
6.1. Mandelbrot-Menge über die Iterationen



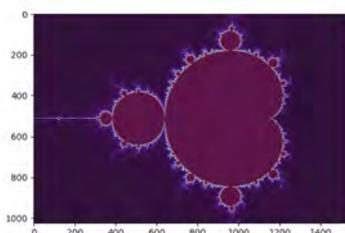
Iteration 5



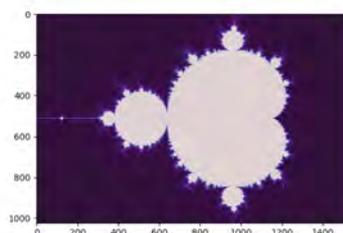
Iteration 10



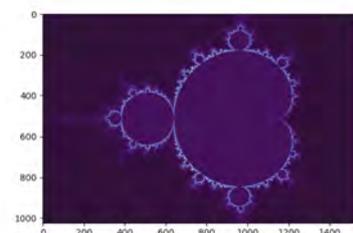
Iteration 50



Iteration 1.000



Iteration 5.000



Iteration 10.000