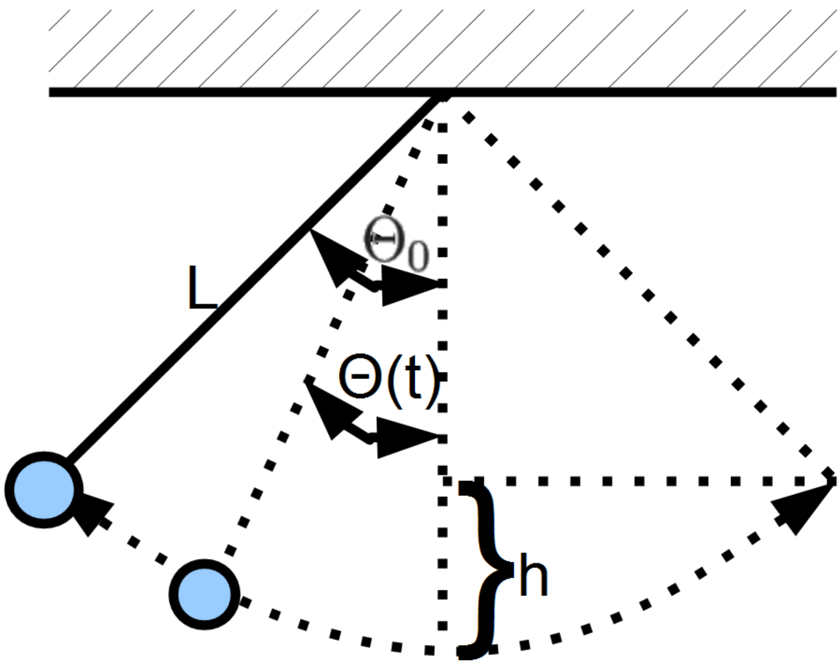
Vom Pendel übers Integral und Python zum Lötkolben und zurück

Teilnehmer:

Andreas-Gymnasium	1 Junge
Heinrich-Hertz-Gymnasium	1 Mädchen
Herder-Gymnasium	1 Mädchen, 3 Jungen
Käthe-Kollwitz-Gymnasium	3 Jungen

Gruppenleiter:

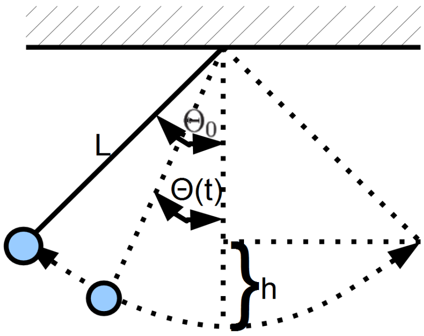
Claus Führer — Lund University
René Lamour — Humboldt-Universität zu Berlin
Caren Tischendorf — Humboldt-Universität zu Berlin, MATH+



1. Einleitung

Bei manchen Pendeln (wie zum Beispiel dem Metronom oder einer Standuhr) ist es wichtig, dass sie im richtigen Takt schwingen. Deshalb ist es von Interesse, die Periodendauer möglichst genau zu bestimmen. Dazu gibt es verschiedene theoretische Annäherungen, über die Riemann-Summe und mithilfe des elliptischen Integrals. Diese Verfahren leiten wir her und berechnen sie dann mit Algorithmen. Zum Schluss beschreiben wir unser Experiment und vergleichen die berechnete Periodendauer mit der gemessenen.

2. Modellierung des Pendels



Ansatz. Um das Pendel zu beschreiben, betrachten wir die Energie des Massepunkts. Die relevante Gesamtenergie E_{ges} ist die Summe aus der potentiellen Energie $E_{pot}(t)$ und der kinetischen Energie $E_{kin}(t)$.

2.1. Potentielle Energie $E_{pot}(t)$

$$\begin{aligned} E_{pot}(t) &= mgh \\ &= mg(L - L * \cos\theta(t)) \\ &= mgL(1 - \cos\theta(t)) \\ E_{pot}(t_0) &= mgL(1 - \cos\theta_0) \end{aligned}$$

2.2. Kinetische Energie $E_{kin}(t)$

$$E_{kin}(t) = \frac{1}{2}mv^2$$

mit der Geschwindigkeit $v(t) = \omega(t)L$ und der Winkelgeschwindigkeit $\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$

Einsetzen der Geschwindigkeit in die Formel für kinetische Energie:

$$E_{kin}(t) = \frac{1}{2}mL^2\Big(\frac{d\theta(t)}{dt}\Big)^2$$

2.3. Anwendung des Energieerhaltungssatzes

Jetzt haben wir alle Formeln, die wir benötigen, um das Pendel zu beschreiben. Zuerst setzen wir die Gesamtenergie zu Beginn und die Gesamtenergie zu jedem beliebigen Zeitpunkt gleich, da sie konstant ist. Diese Formel stellen wir dann um, um auf die Pendeldauer zu kommen.

$$
\begin{aligned}
E_{ges}(t_0) &= E_{ges}(t) = E_{kin}(t) + E_{pot}(t)\\
mgL(1-\cos\theta_0) &= \frac{1}{2}mL^2\Big(\frac{d\theta(t)}{dt}\Big)^2 + mgL(1-\cos\theta(t))\\
mgL(1-\cos\theta_0) &= \frac{1}{2}mL^2\left(\frac{d\theta(t)}{dt}\right)^2 + mgL(1-\cos\theta(t))\\
\left(\frac{d\theta(t)}{dt}\right)^2 &= \frac{2}{L}g(\cos\theta(t)-\cos\theta_0)\\
\frac{d\theta(t)}{dt} &= -\sqrt{\frac{2g}{L}}\sqrt{\cos\theta(t)-\cos\theta_0}
\end{aligned}
$$

Wir nennen den Zeitpunkt, zu dem das Pendel den niedrigsten Punkt erreicht, t_1 und $t_0 = 0$. Die Zeit zwischen t_0 und t_1 ist also eine Viertelperiodendauer. Aufgrund der Monotonie von $\theta(t)$ auf dem Intervall $[t_0, t_1]$ lässt sich dieser Teil einzeln leichter betrachten, als $\theta(t)$ auf dem gesamten Intervall $[t_0, T]$.

$$
\begin{aligned}
\frac{T}{4} = t_1 = \int_{t_0}^{t_1} 1dt \quad &\overset{\substack{\text{Substitution } \theta(t_0)\\ t\to\theta(t)\\ \downarrow}}{=} \quad \int_{\theta(t_0)}^{\theta(t_1)} \frac{dt}{d\theta}d\theta\\
&= -\int_{\theta_0}^{0}\sqrt{\frac{L}{2g}}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}d\theta\\
&= \sqrt{\frac{L}{2g}}\int_0^{\theta_0}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}d\theta
\end{aligned}
$$

3. Riemann-Integral mit Ober- und Untersumme

Überlegung. Es ist uns unmöglich die Stammfunktion von $\frac{1}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}$ zu bilden, daher berechnen wir uns den Wert des Integrals mit Ober- und Untersumme. Hierbei gilt für die Obersumme S_o und die Untersumme S_u, dass

$$
S_o = \sum_{i=1}^{n}\frac{\Theta_0}{n}\max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \quad \text{und} \quad S_u = \sum_{i=1}^{n}\frac{\Theta_0}{n}\min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),
$$

wobei $x_i = \frac{i}{n}\Theta_0$. Da der Computer nicht mit max und min für unendlich viele Zahlen arbeiten kann, müssen wir uns überlegen, wie wir diese aus theoretischen Überlegungen bestimmen können. Dazu zeigen wir die Monotonie von $\frac{1}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}$.

Behauptung. $\frac{1}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}$ ist monoton steigend.

Beweis:

$$
\begin{aligned}
f(\theta_1) < f(\theta_2) &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\cos\theta_1-\cos\theta_0}} < \frac{1}{\sqrt{\cos\theta_2-\cos\theta_0}}\\
&\Leftrightarrow \cos\theta_2-\cos\theta_0 < \cos\theta_1-\cos\theta_0\\
&\Leftrightarrow \cos\theta_2 < \cos\theta_1\\
&\Leftrightarrow \theta_1 < \theta_2
\end{aligned}
$$

□

Korollar 1. Da $f(x)$ monoton ist, so gilt für die Obersumme S_o und die Untersumme S_u, dass

$$S_o = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Theta_0}{n} f(x_i) \quad \text{und} \quad S_u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Theta_0}{n} f(x_{i-1}).$$

4. Riemann-Integral in Python

Durch Änderung des Index können wir die Summe umstellen

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\Theta_0}{n} f(x_{i-1}) \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{\Theta_0}{n} f(x_i) \right)$$

Somit unterscheiden sich die Untersumme von der Obersumme nur noch im ersten und dem letztem Summanden $\Rightarrow$ halbe Rechenzeit

```
#Einbinden der Bibliothek
from numpy import *
```

Fügt Funktionen wie $\sin x$, $\cos x$ und $\sqrt{x}$ hinzu

```
#Der Auslenkwinkel
theta = pi/180*45
#Die Integrationsvariable
theta2 = theta-(0.01/180*pi)
#Die Anzahl der Streifen
n=1_000_000
```

```
#Definieren der Funktion
def f(x):
return 1/sqrt(cos(x)-cos(theta))
```

```
#Breite eines Balkens
schritt = theta2/n
summe = 0
```

Die *for*-Schleife wiederholt einen Prozess für alle i Element der Liste "*range*(1, n)".
range(1, n) erzeugt eine Liste aller natürlichen Zahlen von 1 bis $n-1$.

```
#Berechnen der gleichen Summanden
for i in range(1, n):
  summe += schritt * f(schritt*i)
```

```
#Hinzufuegen der spezifischen Summanden der Ober- und Untersumme
untersumme = schritt*f(0)
untersumme += summe
obersumme = summe+schritt*f(theta2)
```

```
#Ausgeben der Werte
print ("Untersumme:", untersumme)
print ("Obersumme:", obersumme)
print ("Diff:", obersumme-untersumme)
```

Output:

```
Untersumme: 2.2108293636807326
Obersumme: 2.2108502324941144
Periode 2.270225909341762
Diff: 2.0868813381813567e-05
```

5. Arithmetisch-Geometrisches Mittel

Seien a_0 und g_0 zwei reelle Zahlen mit $0 < g_0 \leq a_0$. Dann definieren wir die Folgen

$$a_{n+1} := \frac{a_n + g_n}{2} \qquad\qquad g_{n+1} := \sqrt{a_n \cdot g_n} \tag{1}$$

Die Folgenglieder a_n sind also stets das arithmetische Mittel und die Folgenglieder g_n das geometrische Mittel der vorhergehenden Folgenglieder. Nun wollen wir die Frage untersuchen, ob die beiden Folgen konvergieren.

Lemma 1. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

1. $a_n > 0$ *und* $g_n > 0$, *3.* $a_{n+1} \leq a_n$,
2. $g_n \leq a_n$, *4.* $g_n \leq g_{n+1}$.

Beweis:

1. Dies sieht man leicht per Induktion. Nach Voraussetzung gilt $a_0 > 0$ und $g_0 > 0$. Zudem folgt aus $a_n > 0$ und $g_n > 0$, dass $a_{n+1} = \frac{a_n+g_n}{2} > 0$ und $g_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot g_n} > 0$.
2. $g_n \leq a_n \Leftrightarrow \sqrt{a_n g_n} \leq \frac{a_n+g_n}{2} \Leftrightarrow 4a_n g_n \leq (a_n + g_n)^2 \Leftrightarrow 0 \leq (a_n - g_n)^2$
3. $a_{n+1} \leq a_n \Leftrightarrow \frac{a_n+g_n}{2} \leq a_n \Leftrightarrow g_n \leq a_n$
4. $g_n \leq g_{n+1} \Leftrightarrow g_n \leq \sqrt{a_n g_n} \Leftrightarrow g_n \leq a_n$

□

Somit ist (g_n) eine monoton wachsende Folge und (a_n) eine monoton fallende Folge mit $g_n \leq a_n$. Damit sind beide Folgen beschränkt (gehören zum Intervall $[g_0, a_0]$) und monoton, d.h. sie besitzen einen Grenzwert.

Lemma 2. *Für die in* (1) *definierten Folgen* (g_n) *und* (a_n) *gilt:* $\lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Beweis: Sei $g := \lim_{n\to\infty} g_n$ und $a := \lim_{n\to\infty} g_a$. Dann gilt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + g_n}{2} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} g_n}{2} = \frac{a+g}{2},$$

also $a = g$. □

Definition 1. Für zwei reelle Zahlen a und g mit $0 < g \leq a$ ist das **arithmetisch-geometrische Mittel** $M(a, g)$ definiert als

$$M(a, g) := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} g_n.$$

für die Folgen $a_{n+1} = \frac{a_n+g_n}{2}$ und $g_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot g_n}$ mit $a_0 = a$ und $b_0 = b$.

5.1. Zusammenhang zu elliptischen Integralen

Seien a und b positive reelle Zahlen. Dann betrachten wir das vollständige elliptische Integral

$$I(a,b) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}\,\mathrm{d}\theta. \tag{2}$$

Lemma 3. *Für das in (2) definierte vollständige elliptische Integral $I(a,b)$ von positiven reellen Zahlen a und b gilt:*

$$I(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}\,dt.$$

Beweis: Wir nutzen die Substitution $t := b\tan\theta$ für $\theta \in [0,\pi/2]$. Dann gilt

$$t^2\cos^2\theta = b^2\sin^2\theta$$

und somit

$$(t^2+b^2)\cos^2\theta = b^2 \quad \text{und} \quad t^2 = (b^2+t^2)\sin^2\theta,$$

d.h.

$$a^2\cos^2\theta = \frac{a^2b^2}{t^2+b^2} \quad \text{und} \quad b^2\sin^2\theta = \frac{b^2t^2}{b^2+t^2}.$$

Zudem erhalten wir

$$\mathrm{d}t = b\frac{1}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{t^2+b^2}{b}\,\mathrm{d}\theta.$$

Für die Integralgrenzen $\theta = 0$ und $\theta = \pi/2$ bekommen wir $t = 0$ und $t = \infty$ und somit

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}\,\mathrm{d}t.$$

□

Behauptung. (Gauß 1799) Für das in (2) definierte vollständige elliptische Integral $I(a,b)$ von positiven reellen Zahlen a und b gilt:

$$I(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}) = I(a,b).$$

Beweis: Zunächst lässt sich leicht nachprüfen, dass die Abbildung

$$f(t) := \frac{1}{2}(t - \frac{ab}{t})$$

eine eineindeutige Abbildung von $(0,\infty)$ auf $(-\infty,\infty)$ ist. Damit können wir die Substitution

$$s := \frac{1}{2}(t - \frac{ab}{t}) \quad \text{für } t \in (0,\infty)$$

benutzen. Es gilt zunächst:

$$(a^2+t^2)(b^2+t^2) = (t^2-ab)^2 + t^2(a+b)^2 = 4t^2s^2 + t^2(a+b)^2$$

und

$$\mathrm{d}s = (\frac{1}{2} + \frac{ab}{2t^2})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2t^2}(t^2 + ab)\,\mathrm{d}t.$$

Setzen wir dies ein, so bekommen wir

$$I(a,b) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{4s^2+(a+b)^2}}\frac{2t}{t^2+ab}\,\mathrm{d}s.$$

Jetzt wissen wir noch, dass

$$(t^2+ab)^2 = (t^2-ab)^2 + 4t^2ab = 4t^2s^2 + 4t^2ab = 4t^2(s^2+ab),$$

d.h.

$$t^2 + ab = 2t\sqrt{s^2+ab}$$

und damit

$$\begin{aligned}
I(a,b) &= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{4s^2+(a+b)^2}}\frac{1}{\sqrt{s^2+ab}}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{s^2+(\frac{a+b}{2})^2}}\frac{1}{\sqrt{s^2+(\sqrt{ab})^2}}\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{s^2+(\frac{a+b}{2})^2}}\frac{1}{\sqrt{s^2+(\sqrt{ab})^2}}\,\mathrm{d}s \\
&= I(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}).
\end{aligned}$$

□

Satz 1. *(Gauß 1799) Seien a und b reelle Zahlen mit $a \geq g > 0$. Dann gilt für das arithmetisch-geometrische Mittel $M(a,g)$, dass*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}\,d\theta = \frac{\pi}{2M(a,b)}.$$

Beweis: Nach Satz und der Definition des algebraisch-geometrischen Mittels wissen wir, dass $I(a,b) = I(a_n, b_n)$ für alle in (1) definierten Folgenglieder a_n und $b_n := g_n$. Somit erhalten wir für m:=M(a,b), dass

$$\begin{aligned}
I(a,b) &= \lim_{n\to\infty} I(a,b) = \lim_{n\to\infty} I(a_n,b_n) = I(\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n) = I(m,m) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{m^2\cos^2\theta + m^2\sin^2\theta}}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{m}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}\frac{1}{m} = \frac{\pi}{2M(a,b)}.
\end{aligned}$$

□

Überlegung. Um nun die Periodendauer berechnen zu können, müssen wir a und b noch bestimmen. Mit $k := \sin\frac{\theta_0}{2}$ gilt

$$\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\cos^2\varphi + (1-k^2)\sin^2\phi}}.$$

Somit ist $a = 1$ und $b = \sqrt{1-k^2} = \sqrt{1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}}$ und wir erhalten:

Korollar 2. Für die Periodendauer T gilt:

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \frac{\pi}{2M(1, \sqrt{1 - \sin\frac{\theta_0}{2}^2})}.$$

5.2. Arithmetisch-geometrisches Mittel mit Python

```
#Importieren der Bibliotheken
from numpy import *
from decimal import *
```

```
#Genauigkeit der Dezimalzahlen
getcontext().prec = 100
```

```
#Definitionen
winkel = 45.
iterationen = 10 # Iterationen = Anzahl an Wiederholungen
```

```
#Umrechnen in Radiant
rad = (pi/180)*winkel
```

```
#Berechnen von k
k = sin(rad/2)
```

```
#Berechnen von a_0 und g_0
a = Decimal(1)
g = Decimal(sqrt(1-k**2))
```

Durch die *for*-Schleife wird a_{10} und g_{10} berechnet:

```
#Die Folge berechnen
for i in range(iterationen):
  an = a
  gn = g
  a = (an+gn)/Decimal(2)
  g = Decimal(an*gn).sqrt()
```

Formel für die Periodendauer ist $T = \frac{\pi}{2*a} * 4 * \sqrt{\frac{1.2985}{9.81}} s$.

```
#Ausgabe der Ergebnisse
print("A", iterationen,":", a)
print("Differenz", a-g)
T =  Decimal(pi)/(Decimal(2)*a)*Decimal(4)*Decimal(sqrt(1.2985/9.81))
print("Periodendauer", T )
```

```
A 10 : 0.961563107883199520692007022673011967...
Differenz 0
Periodendauer 2.377324954749410681845744453322...
```

6. Experiment

6.1. Aufbau

Für die Konstruktion verwenden wir einen Stativstab, welcher an einer geraden Oberfläche befestigt wird. An dem oberen Ende des Stabes wird ein Pendel befestigt, welches aus einer Schnur und einem am Ende hängenden Gewicht besteht. An dem Stativstab wird ein 45°-Winkel befestigt, welcher für die Ausrichtung des Pendels bei Beginn der Messung dient. Unterhalb der Plattform befindet sich eine große weiße Projektionsfläche, auf welche die Messergebnisse mit einem Beamer projiziert werden. Unter dieser Projektionsfläche wird die Lichtschranke aufgebaut, durch welche das Pendel bei einer Messung schwingt.

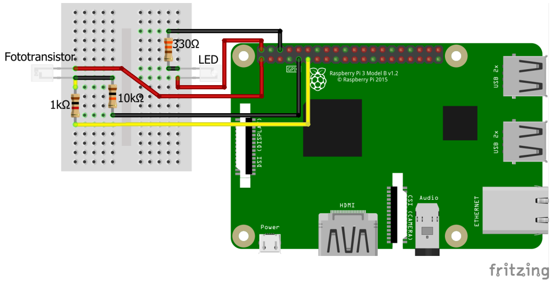


Abbildung 13: Schaltbild: Lichtschranke an RaspberryPI

6.2. Durchführung

Vor Beginn der Messung wird das Pendel um 45° zur Ruheposition ausgelenkt. Nach Loslassen des Pendels schwingt dieses und löst bei jeder Schwingung die Lichtschranke aus. Die Lichtschranke, welche an einen RaspberryPI angeschlossen ist, schickt die gemessenen Werte an den Computer, welcher die gemessenen Zeiten projiziert.

6.3. Löten

Die Lichtschranke, welche wir für unser Experiment brauchen, haben wir uns selbst gebaut. Dafür haben wir eine Platine, drei Widerstände, eine LED und einen Fototransistor auf eine Lochrasterplatine gelötet. Ein kleines Problem stellte der Fototransistor dar, da die Messergebnisse durch die Empfindlichkeit durch Raumlicht verfälscht wurden. Deshalb haben wir kleine Abschirmungen um die LED und den Transistor gebaut, wodurch die Ergebnisse verbessert wurden. Beim Löten musste man mit viel Gefühl arbeiten, da das Lötzinn sonst auf andere Leiterbahnen gelaufen wäre und beim Anschließen an den RaspberryPI einen Kurzschluss ausgelöst hätte.

Genutzte Bauteile: Fototransistor $BPW96C$, LED $TLHK5800$, Keramikwiderstände 330Ω, $1k\Omega$, $10k\Omega$.

6.4. Programm zum Messen mit dem RPi

```
#Bibliothek fuer die Belegung der GPIO pins
from RPi import GPIO
#Ermoeglicht Zeitmessung
import time

def Messung():
  GPIO.setmode(GPIO.BOARD)
  #Setze Pin 11 als Input
  GPIO.setup(11,GPIO.IN)
  #Zaehle die durchlaeufe
  count = 0
  #warte auf unterbrechung der Lichtschranke
  GPIO.wait_for_edge(11, GPIO.FALLING, bouncetime=4)
```

```
    #speichere aktuelle Zeit
    time1 = time.time()
    #Zaehle die Perioden
    periode = 0
    #Wiederhole unendlich oft
    while True:
      GPIO.wait_for_edge(11, GPIO.FALLING, bouncetime=4)
      #Wenn unterbrechung registriert erhoehe Zaehler
      count += 1
      #Bei jeder zweiten Unterbrechung gebe Periodendauer aus
      if count >= 2:
        #Berechne vergangene zeit seit letzter Unterbrechung
        delta = time.time() - time1
        #Setze Zeit zurueck
        time1 = time.time()
        #setze Zaehler zurueck
        count = 0
        #Erhoehe Zaehler der Perioden
        periode += 1
        #Gebe Periodennummer und -zahl aus
        print("Periode "+str(periode)+":"+str(delta))
```

7. Zusammenfassung

Wir haben für die Periodendauer T folgende Ergebnisse berechnet und gemessen:

- berechnetes Ergebnis (Ober- & Untersumme): $2,175\,Sekunden$

- berechnetes Ergebnis (Gauß-Verfahren): $2,377\,Sekunden$

- gemessenes Ergebnis: $2,258\,Sekunden$

Die Abweichungen zwischen dem Ergebnis des Gauß-Verfahrens und dem Experiment kann man auf den Unterschied zwischen Realität und Theorie zurückführen, da das ideale Pendel keine Luftreibung berücksichtigt und außerdem von einer Punktmasse als Gewicht ausgeht.

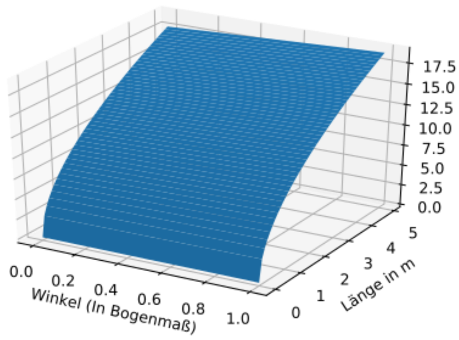


Abbildung 14: Periodendauer in Abhängigkeit von Pendellänge bzw. Auslenkwinkel

Aus dem Graphen kann man entnehmen, dass der Auslenkwinkel wenig Einfluss auf die Periodendauer hat. Außerdem sieht man, dass je größer die Pendellänge wird, desto länger wird die Periodendauer.