Differentialgleichungen IV

Übung Erfüllt die folgende ODE die lokale Lipschitzbedingung?

$$x'(t) = \frac{5}{3} x(t)^{\frac{2}{5}}, \quad x(0)=0.$$

Gebe zwei verschiedene Lösungen an. Findest du eine kombinierte Lösung?

Wir sehen $F(t,x) = \frac{5}{3} x^{\frac{2}{5}}$. Dann gilt

$$|F(t,x) - F(t,y)| = \frac{5}{3} |x^{\frac{2}{5}} - y^{\frac{2}{5}}|,$$

es ist also nicht lokal Lipschitz-stetig. So finden wir zwei Lösungen: $x(t)=0$ und $x(t) = t^{\frac{5}{3}}$.

Wir stellen sogar fest

$$x(t) = \begin{cases} (t-a)^{\frac{5}{3}}, & t \geq a \\ 0, & t \leq a \end{cases}$$

ist auch eine Lösung.

Lokaler Existenzsatz (Picard-Lindelöf) Sei F stetig in t und lokal Lipschitz-stetig in x. Dann gibt es zu jedem Anfangswert (t_0, x_0) ein Intervall $(t_0-\delta, t_0+\delta)$ auf welchem

$$x'(t) = F(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

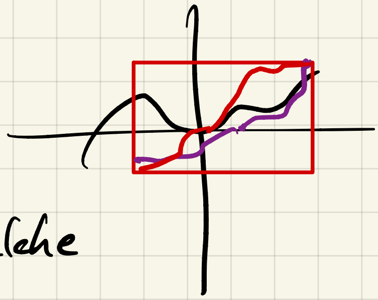
(genau) eine Lösung besitzt.

Beweis Wir betrachten $Q := [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b]$ für $a, b > 0$ beliebig. Da F stetig ist, gilt $\sup_{(t,x)\in Q} |F(t,x)| =: M < \infty$. Da F lokal Lipschitz ist, existiert ein $0 < c \leq a$ mit F ist Lipschitz in x für alle $t \in [t_0 - c, t_0 + c]$ mit einer Lipschitz-Konstante L.

Wir wählen nun $\delta > 0$, so dass $\delta < c$, $2\delta L < 1$, $\delta M < b$.
Betrachten wir nun $K := [t_0-\delta, t_0+\delta] \times [x_0-b, x_0+b]$, so stellen fest: F ist Lipschitz-stetig auf K mit Konstante L und für alle ψ mit

$$\psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, \psi(s))\, ds \,, \quad t \in [t_0-\delta, t_0+\delta] \qquad (1)$$

gilt $(t, \psi(t)) \in K$.



Wir sehen an dieser Stelle, dass eine stetige Funktion ψ auf K zu konstruieren, welche (1) erfüllt. Dazu betrachten wir den vollständigen Raum

$$\mathcal{M} := \{\psi : [t_0-\delta, t_0+\delta] \to [x_0-b, x_0+b] \mid \psi \text{ stetig}\},$$

und die Abbildung

$$(P\psi)(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, \psi(s))\, ds.$$

Dies ist eine strikte Kontraktion, da

$$\begin{aligned}
\|P\psi_0 - P\psi_1\|_\infty &:= \sup_{t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]} |(P\psi_0)(t) - (P\psi_1)(t)| \\
&= \sup_{t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]} \left| x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, \psi_0(s))\, ds - x_0 - \int_{t_0}^{t} F(s, \psi_1(s))\, ds \right| \\
&= \sup_{t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]} \left| \int_{t_0}^{t} F(s, \psi_0(s)) - F(s, \psi_1(s))\, ds \right| \\
&\le \sup_{t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]} \left| \int_{t_0}^{t} |F(s, \psi_0(s)) - F(s, \psi_1(s))|\, ds \right| \\
&\le \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} |F(s, \psi_0(s)) - F(s, \psi_1(s))|\, ds \\
&\le \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} L \cdot \underbrace{|\psi_0(s) - \psi_1(s)|}_{}\, ds \\
&\le \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} L \cdot \sup_{t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]} |\psi_0(t) - \psi_1(t)|\, ds \\
&= 2\delta L \sup_{t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]} |\psi_0(t) - \psi_1(t)| = \overbrace{2\delta L}^{<1} \|\psi_0 - \psi_1\|_\infty.
\end{aligned}$$

Damit können wir den Banachschen Fixpunktsatz anwenden um (genau) einen Fixpunkt ψ zu erhalten, d.h.

$$\psi(t) = (P\psi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, \psi(s))\, ds.$$

$\square$

<u>Bemerkung</u> Wenn wir nun eine allgemeine ODE

$$x'(t) = F(t, x(t))$$

gegeben haben, welche die Bedingungen des oberen Satzes erfüllt, so können wir durch die <u>Picard-Lindelöf-Iteration</u>

$$x_0(t) := x_0 \,, \qquad x_n(t) \longrightarrow x_{n+1}(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, x_n(s))\, ds$$

die Lösung approximieren. Unter Umständen erlaubt uns diese Iteration sogar, die Lösung exakt zu ermitteln.