Differentialgleichungen II

Wir betrachten

$$x'(t) = \lambda(t)\, x(t).$$

Wir wollen den <u>e-Ansatz</u> nutzen, d.h.

$$x(t) =: e^{h(t)} \quad (\text{für } x(t) > 0)$$

$$\Leftrightarrow h(t) := \log x(t).$$

Eingesetzt erhalten wir

$$h'(t) e^{h(t)} = x'(t) = \lambda(t)\, x(t) = \lambda(t) e^{h(t)}$$

$$\Rightarrow \quad h'(t) = \lambda(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad h(t) = \int_0^t \lambda(s)\, ds + C$$

Damit folgt

$$x(t) = e^{h(t)} = e^{\int_0^t \lambda(s)\, ds + C}.$$

Betrachten wir auch noch $x(t) < 0$ und $x(t) < 0$, so kommen wir insgesamt auf

$$x(t) = c \cdot e^{\int_0^t \lambda(s) ds}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Wir kommen auf diese Lösung auch durch das Verfahren der <u>Trennung der Variablen</u>. Wir starten damit $x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ zuschreiben und „umzustellen":

$$x'(t) = \lambda(t)\, x(t)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lambda(t)\, x(t) \qquad |\cdot dt \quad |: x(t)$$

$$\frac{1}{x}\, dx = \lambda(t)\, dt \qquad \left| \int (\ldots) \right.$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \int \lambda(t)\, dt$$

$$\ln |x(t)| = \int_0^t \lambda(s)\, ds + C$$

$$x(t) = c \cdot e^{\int_0^t \lambda(s)\,ds}$$

Als nächstes wollen wir inhomogene lineare ODEs betrachten. Dazu fangen wir mit dem Beispiel

$$x'(t) = x(t) + g(t)$$

an. Die zugehörige homogene Gleichung

$$x'(t) = x(t)$$

hat die allgemeine Lösung

$$x(t) = \underline{c \cdot e^t}.$$

Wir nutzen jetzt für die inhomogene Gleichung das Verfahren der <u>Variation der Konstanten</u>, d.h.

$$x(t) =: c(t) \cdot e^t$$

$$\Leftrightarrow \quad c(t) = \frac{x(t)}{e^t}.$$

Dann gilt

$$c'(t)e^t + c(t)e^t = x'(t) = x(t) + g(t) = c(t)e^t + g(t)$$

$$\Rightarrow \quad c'(t)e^t = g(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad c'(t) = \frac{g(t)}{e^t}$$

$$\Leftrightarrow \quad c(t) = \int_0^t \frac{g(s)}{e^s}\,ds + C$$

Die allgemeine Lösung hat also die Form

$$x(t) = c(t)e^t = \left(\int_0^t \frac{g(s)}{e^s}\,ds + c\right) e^t$$

$$= \underbrace{\int_0^t \frac{g(s)}{e^s}\,ds \cdot e^t}_{\text{spezielle Lösung}} + \underbrace{c \cdot e^t}_{\substack{\text{homogene Lösung} \\ \text{(Fundamentallösung)}}}$$

Dies muss immer so sein! Sind nämlich $x_1(t), x_2(t)$ zwei inhomogene Lösungen, so ist $x_1(t) - x_2(t)$ eine homogene

Lösung, denn

$$x_1'(t)-x_2'(t) = \lambda(t)x_1(t)+g(t) - \lambda(t)x_2(t)-g(t)$$
$$= \lambda(t)\left(x_1(t)-x_2(t)\right).$$

__Übungen__

Finde alle Lösungen von

(i) $x'(t)=2x(t)+t$

↳ homogene Lösung $x(t)=c\cdot e^{2t}$

↳ Variation der Konstanten, d.h. $x(t)=c(t)e^{2t}$.

$$\Rightarrow c'(t)e^{2t}+c(t)\cdot 2e^{2t}=x'(t)=2x(t)+t$$
$$=2c(t)e^{2t}+t$$
$$\Rightarrow c'(t)e^{2t}=t \Leftrightarrow c'(t)=\frac{t}{e^{2t}}.$$
$$\Rightarrow c(t)=\int_0^t \frac{s}{e^{2s}}\,ds+C$$
$$=\int_0^t s\cdot e^{-2s}\,ds+C$$
$$=t\cdot\frac{1}{(-2)}e^{-2t}-\int_0^t\frac{1}{(-2)}e^{-2s}\,ds+C$$
$$=-\frac{1}{2}te^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-2t}+\underbrace{\frac{1}{4}+C}_{=c}$$
$$\Rightarrow x(t)=c(t)e^{2t}$$
$$=\left(-\frac{1}{2}te^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-2t}+c\right)e^{2t}$$
$$=c\cdot e^{2t}-\frac{t}{2}-\frac{1}{4}.$$