Differentialgleichungen V

Einschub (Potenzreihen)

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \ldots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \ldots$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \quad , \ |x| \le 1$$

Beispiel (Picard-Lindelöf-Iteration)

Wir betrachten die ODE

$$x'(t) = \lambda(t)\, x(t) \,, \quad x(0) = 1.$$

Es gilt also $F(t,x) = \lambda(t) \cdot x$. Damit diese Funktion stetig ist, brauchen wir, dass λ stetig ist. Zudem ist sie lokal Lipschitz in x, da

$$|F(t,x) - F(t,y)| = |\lambda(t)x - \lambda(t)y| = |\lambda(t)|\, |x-y|.$$

Wir wollen nun die Lösung durch die Picard-Iteration bestimmen. Dazu setzen wir

$$x_0(t) = x(0) = 1,$$

$$x_1(t) = x(0) + \int_0^t F(s, x_0(s))\,ds = 1 + \int_0^t \lambda(s)\, x_0(s)\,ds = 1 + \int_0^t \lambda(s) \cdot 1\,ds = 1 + \int_0^t \lambda(s)\,ds$$

$$x_2(t) = x(0) + \int_0^t \lambda(s) \cdot x_1(s)\,ds = 1 + \int_0^t \lambda(s)\left(1 + \int_0^s \lambda(r)\,dr\right) ds$$

$$= 1 + \int_0^t \lambda(s)\,ds + \int_0^t \lambda(s) \int_0^s \lambda(r)\,dr\,ds$$

$$= 1 + \int_0^t \lambda(s)\,ds + \frac{1}{2}\left(\int_0^t \lambda(s)\,ds\right)^2,$$

denn $\frac{d}{dt}\,\frac{1}{2}\left(\int_0^t \lambda(s)ds\right)^2 = \int_0^t \lambda(s)ds\,\lambda(t).$

$$\begin{aligned} x_3(t) &= x(0) + \int_0^t \lambda(s)\, x_2(s)ds \\ &= 1 + \int_0^t \lambda(s)\left(1 + \int_0^s \lambda(r)dr + \frac{1}{2}\left(\int_0^s \lambda(r)dr\right)^2\right)ds \\ &= 1 + \int_0^t \lambda(s)ds + \frac{1}{2}\left(\int_0^t \lambda(s)ds\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\int_0^t \lambda(s)ds\right)^3 \end{aligned}$$

Wir vermuten also

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\int_0^t \lambda(s)ds\right)^k}{k!}.$$

Der Beweis erfolgt induktiv.

$$\begin{aligned} x_{n+1}(t) &= x(0) + \int_0^t \lambda(s)\, x_n(s)\, ds \\ &= 1 + \int_0^t \lambda(s) \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\int_0^s \lambda(r)dr\right)^k}{k!} ds \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{n} \int_0^t \lambda(s) \frac{\left(\int_0^s \lambda(r)dr\right)^k}{k!} ds \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\int_0^t \lambda(s)ds\right)^{k+1}}{(k+1)!} \end{aligned}$$

denn $\frac{d}{dt}\frac{\left(\int_0^t \lambda(s)ds\right)^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{\left(\int_0^t \lambda(s)ds\right)^k}{k!}\cdot\lambda(t).$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\left(\int_0^t \lambda(s)ds\right)^k}{k!}$$

Daraus folgt

$$x_n(t) \to x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\int_0^t \lambda(s)ds\right)^k}{k!} = e^{\int_0^t \lambda(s)ds}.$$

<u>Übung</u> Gegeben sei

$$x'(t) = \sqrt{|x(t)|}, \quad x(0) = 0.$$

(a) Genügt diese ODE den Bedingungen von Picard-Lindelöf?

(b) Welche Lösung erhaltet ihr durch die Picard-Iteration?

<u>Übung</u> Wir betrachten
$$x''(t) = -x(t), \quad x(0) = 0, \; x'(0) = c$$
Um diese mit der Picard-Iteration zu lösen, müssen wir sie zuerst in eine ODE 1. Ordnung umwandeln:
$$x'(t) = y(t) \quad , \; x(0) = 0,$$
$$y'(t) = -x(t) \quad , \; y(0) = c.$$
Bestimme die Lösung durch die Picard-Iteration.
$$x_0(t) = 0$$
$$\underline{y_0(t) = c}$$
$$x_1(t) = x(0) + \int_0^t y_0(s)\,ds$$
$$\underline{y_1(t) = y(0)} + \int_0^t -x_0(s)\,ds$$
...

<u>Übung</u> Wir wollen
$$x'(t) = x^2(t), \quad x(0) = 1$$
lösen.

(a) Genügt diese ODE den Voraussetzungen von Picard-Lindelöf?

(b) Bestimme die Lösung durch eine Picard-Iteration. Auf welchem Intervall ist diese definiert?

Hinweis: Zeige, dass
$$\sum_{k=0}^{n} t^k \le x_k(t) \le \sum_{k=0}^{\infty} t^k$$
und folgere, dass
$$x_k(t) \to \sum_{k=0}^{\infty} t^k.$$
Für welche t ist diese Summe definiert?