Kapitel 1

Hyperbolische Geometrie

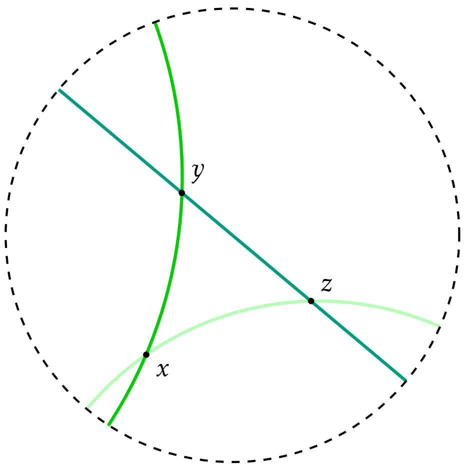

Abbildung 1.1: Ein Dreieck im Poincaré-Scheibenmodell.

1.1 Poincaré-Scheibe

Als Beispiel einer hyperbolischen Geometrie schauen wir das Scheibenmodell von Poincaré an. Dazu bauen wir zunächst alle nötigen Bestandteile eine Geometrie zusammen und prüfen, dass es sich dabei wirklich um eine hyperbolische Geometrie handelt.

Wir schreiben $\mathscr{H} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, d, w)$ für unser geometrisches Modell. Die Bestandteile haben die folgende Bedeutung.

- Die Menge $\mathcal{P}$ ist die *Punktmenge*, die Elemente dieser Menge bezeichnen wir als *Punkte*.
- Die Menge $\mathcal{G}$ ist die *Geradenmenge*, die Elemente dieser Menge bezeichnen wir als *Geraden*.
- Die Abbildung $d : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ ist die sogenannte *Abstandsfunktion*, für zwei Punkte $x, y \in \mathcal{P}$ nennen wir $d(x, y)$ den *Abstand* von x zu y.
- Die Abbildung $w : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to [0, \pi]$ ist das sogenannte *Winkelmaß*, für drei Punkte $x, z, y \in \mathcal{P}$ nennen wir $w(x, z, y)$ den *Winkel* zwischen x und y an z.

Wir betten das Scheibenmodell in die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ein. Das bedeutet, dass wir die vorgefertigten und anschaulichen Objekte der uns bekannten euklidischen Ebene verwenden, um daraus eine völlig neue Geometrie zu visualisieren.

1.1.1 Wiederholung: Komplexe Zahlen

Einige Polynomgleichungen besitzen keine Lösungen. Die wohl einfach und kleinste solcher Gleichungen ist

$$x^2 + 1 = 0.$$

Wir definieren i also eine Lösung dieser Gleichung, wobei $-i$ dann entsprechend die andere Lösung ist. Es gilt also $i^2 = -1$. Wir fügen diese Zahl den reellen Zahlen hinzu und ergänzen zusätzlich noch alle möglichen und nötigen Zahlen, sodass wir einen minimalen Körper erhalten, der $\mathbb{R}$ und i enthält. Diesen nennen wir $\mathbb{C}$ und es gilt

$$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$$

Komplexe Zahlen werden oft mit dem Buchstaben z bezeichnet. Der „absolute Betrag“ einer komplexen Zahl ist analog zur euklidischen Norm, das heißt

$$|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ein wichtiges Konzept im Umgang mit komplexen Zahlen ist die Komplexe Konjugation. Diese wird durch einen Strich über der Zahl angedeutet. Wir haben folgende Zusammenhänge für $z = a + ib$

- $\overline{z} = \overline{a + ib} := a - ib$
- $\mathfrak{Re}(z) := a = \frac{z+\overline{z}}{2}$ und $\mathfrak{Im}(z) := b = \frac{z-\overline{z}}{2}$
- $|z|^2 = z\overline{z} \in \mathbb{R}$

Aufgabe 1.1.1 Schreibe $\frac{3+7i}{2-4i}$ in die Form $a + ib$.

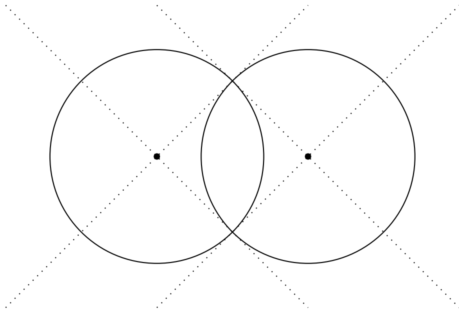

Abbildung 1.2: Zwei zueinander rechtwinklige Kreise

Die Punktemenge Die gesamte hyperbolische „Ebene“ wird im Scheibenmodell von Poincaré auf die Einheitsscheibe gepackt. Als Punktmenge verwenden wir also die Menge

$$\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Beachte hierbei, dass der Rand **nicht** dazugehört.

Die Geradenmenge Als Geraden kommen genau 2 Arten infrage. Die Durchmesser der Kreisscheibe seien Geraden und Bögen, die im Rand anfangen und enden und zum Rand selbst einen rechten Winkel haben. Ein Durchmesser hat die Form

$$\{\lambda z \in \mathbb{C} : \lambda \in (-1, 1)\}$$

für eine beliebige komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.

Um nun noch die anderen Geraden zu definieren, schauen wir uns genauer an, wie wir sie konstruieren können. Zwei Kreise K, L schneiden sich im rechten Winkel genau dann, wenn die Tangenten an den Schnittpunkten durch den Mittelpunkt des jeweils anderen Kreises verlaufen. Wir schreiben $K \perp L$, falls das der Fall ist und sagen, dass diese Kreises rechtwinklig zueinander stehen. Wählen wir nun K als den Einheitskreis, dann ist $L \cap \mathcal{P}$ genau eine hyperbolische Gerade.

Aufgabe 1.1.2 Gegeben eines Kreises K und eines Punktes q mit positivem Abstand zum Kreis K, konstruiere einen Kreis L mit q als Mittelpunkt und $K \perp L$.

Aufgabe 1.1.3 Die Kreisgleichung für einen Kreis mit Mittelpunkt $q \in \mathbb{C}$ und Radius $r > 0$ lautet

$$|z - q|^2 = r^2$$

Formuliere die Kreisgleichung für den Kreis L aus der vorigen Aufgabe, wenn K den Radius 1 hat.

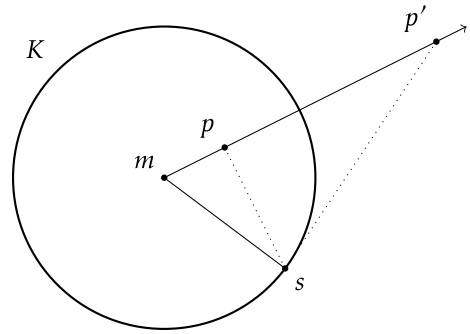

Abbildung 1.3: Beispiel einer Spiegelung eines Punktes P am Kreis K. Wir ziehen eine Senkrechte an P anschließend die Tangente am Schnittpunkt S.

Lösung Für q mit $|q| > 1$ lautet die Kreisgleichung für L

$$|z - q|^2 = |q|^2 - 1$$

Wir erhalten formal die folgende Geradenmenge.

$$\mathcal{G} = \bigcup_{\substack{z \in \mathcal{P} \\ |z|=1}} \{\lambda z \in \mathbb{C} : \lambda \in (-1, 1)\} \cup \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{C} \\ |q|>1}} \left\{\{z \in \mathcal{P} : |z - q|^2 = |q|^2 - 1\}\right\}$$

Diese formale Definition ist nicht weiter relevant für weitere Überlegungen, wir werden ausschließlich geometrisch argumentieren.

Wie konstruieren wir Geraden? Eine natürliche Frage ist natürlich, wie wir zu zwei gegebenen Punkten $x, y \in \mathcal{P}$, die eine Gerade finden, die durch sie durch geht. In einer *Inzidenzgeometrie*, muss sowas schließlich möglich sein.

Gesucht ist zu zwei Punkten auf der Scheibe, der Mittelpunkt des Kreises (falls er existiert), der durch die beiden Punkte geht und im rechten Winkel zum Einheitskreis steht. Der Mittelpunkt eines Kreises ist eindeutig bestimmt durch 3 Punkte des Kreises. Wir ziehen einfach zwei Mittelsenkrechten und der Schnittpunkt ist der gesuchte Punkt. Aber wir haben nur 2 Punkt aktuell gegeben. Wie bekommen wir noch einen dritten Punkt mit dem wir dann den Rest schaffen? Hierfür schauen wir uns ein interessantes Werkzeug an: Die *Kreisspiegelung*.

1.1.2 Inversion am Kreis

Ist $K \subseteq \mathbb{C}$ ein Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius $r > 0$ und $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein beliebiger Punkt, der nicht der Mittelpunkt von K ist, dann ist p' die *Spiegelung* von p an K, wenn $p' = \lambda p$ für ein $\lambda > 0$ und es gilt

$$|p| \cdot |p'| = r^2$$

Aufgabe 1.1.4 Beweise, dass die Spiegelung p' existiert und eindeutig bestimmt ist.

Ab dieser Stelle setzen wir nun $r = 1$, also ist K der Einheitskreis. Wir definieren die Abbildung $I : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ durch

$$I(z) = \begin{cases} (\overline{z})^{-1} & \text{falls } z \neq 0 \\ \infty & \text{falls } z = 0 \\ 0 & \text{falls } z = \infty \end{cases}.$$

Aufgabe 1.1.5 Zeige, dass $I(z)$ für $z \notin \{0, \infty\}$ wirklich die Spiegelung von z am Kreis K ist. Inwiefern ergibt die Besetzung von $I(0)$ und $I(\infty)$ Sinn?

Aufgabe 1.1.6 Zeige, dass I selbstinvers ist, das heißt

$$I \circ I = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}.$$

Ist $L \subseteq \mathbb{C}$, dann bezeichnen wir mit $I(L) = \{I(z) : z \in L\}$ die Spiegelung von L an K.

Wenn L ein Kreis ist, was ist dann $I(L)$?

Zunächst sei L ein Kreis, der den Mittelpunkt 0 nicht enthält, also $0 \notin L$. Jetzt stellen wir eine Vermutung auf, welche Form $I(L)$ haben wird, indem wir uns einige Punkte herausnehmen und explizit die Spiegelungen an K konstruieren. Damit erhalten wir ein Bild wie in Abbildung 1.4.

Wir stellen die Vermutung auf, dass $I(L)$ ein Kreis ist. Jetzt ist die Frage, wo denn der Mittelpunkt dieses Kreises läge und welchen Radius er hat.

Aufgabe 1.1.7 Stelle eine oder mehrere Vermutungen auf, wo der Mittelpunkt liegen könnte und welchen Wert der Radius hat. Versuche deine Vermutungen zu testen, indem du einfache Beispiele konstruierst. Funktioniert deine Vermutung zum Beispiel für $L = K$?

Wir merken nach einigen Überlegungen, dass es gar nicht so einfach ist, den Kreis $I(L)$ (wenn es denn ein Kreis ist) zu bestimmen. Um doch zum Erfolg zu kommen, gehen wir heuristisch vor. Wir nehmen nun an, dass $I(L)$ tatsächlich ein Kreis ist. Dann bestimmen wir unter dieser Annahme, welchen Radius und welche Position der Mittelpunkt haben muss. Anschließend beweisen wir, dass $I(L)$ ein Kreis ist, indem wir beweisen, dass alle Punkte darin einen Abstand gleich diesem Radius zum entsprechenden Mittelpunkt besitzt. Na dann mal los.

Sei $L \subseteq \mathcal{P}$ ein Kreis mit Mittelpunkt q und Radius r. Ziehe nun eine Gerade durch den Nullpunkt, die tangential zu L steht. Da wir annehmen, dass $I(L)$ ein Kreis ist, müsste diese Gerade nun auch tangential zu $I(L)$ stehen. Den Schnittpunkt der Geraden und $I(L)$ bezeichnen wir mit p' und den Schnittpunkt mit L nennen wir p. Da p' der einzige Punkt auf dem Strahl $\overrightarrow{0p}$ ist, muss $I(p) = p'$ gelten. Wir erhalten

$$|p| \cdot |p'| = 1.$$

Der Mittelpunkt von $I(L)$ heiße q' und der Radius r'. Beachte, dass im Allgemeinen $I(q) \neq q'$ gilt. Das wäre ja sonst zu einfach. Wir sehen nun, dass die Geraden qp und $q'p'$ parallel sind, das sie beide senkrecht auf unserer eingezeichneten Geraden liegen. Nach Strahlensatz folgt somit

$$\frac{|q'|}{|q|} = \frac{|p'|}{|p|}.$$

Außerdem haben wir

$$q' = q \cdot \frac{|q'|}{|q|}$$

und somit schließlich

$$q' = q \cdot \frac{|q'|}{|q|} = q \cdot \frac{|p'|}{|p|}.$$

Wir können den rechten Term immer noch nicht berechnen, da wir p und p' nicht kennen. Wir können aber unsere erste Erkenntnis $|p| \cdot |p'| = 1$ benutzen, um das Problem zu reduzieren. Damit erhalten wir

$$q' = q \cdot \frac{1}{|p|^2}.$$

Den fehlenden Term $|p|^2$ lösen wir im rechtwinkligen Dreieck $\triangle 0pq$ durch den Satz des Pythagoras. Schlussendlich erhalten wir einen Kandidaten für den Mittelpunkt von $I(L)$, nämlich

$$q' = q \cdot \frac{1}{|q|^2 - r^2}.$$

Eine weitere Anwendung des Strahlensatzes zeigt außerdem

$$\frac{r'}{r} = \frac{|q'|}{|q|} = \frac{1}{|q|^2 - r^2}$$

und damit ist

$$r' = r \cdot \frac{1}{|q|^2 - r^2}.$$

Wir haben unsere Kandidaten gefunden. Was jetzt nur noch fehlen würde, wäre zu zeigen, dass das $I(L)$ wirklich der Kreis mit Mittelpunkt q' und Radius r' ist. Dies tun wir an dieser Stelle aber nicht und setzen es lediglich als wahr voraus für die letzten beiden Aufgaben.

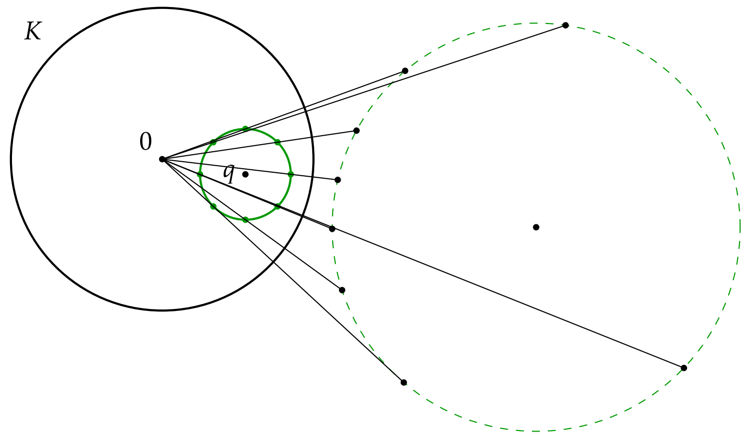

Abbildung 1.4: Für eine Idee, konstruieren wir für einen Kreis und konkrete Punkte auf dem Kreis, deren Spiegelungen. Nach einiger Zeit erhalten wir die Idee, dass das Bild ein Kreis sein könnte.

Aufgabe 1.1.8 Zeige, dass $L \perp K$ genau dann, wenn $I(L) = L$.

Aufgabe 1.1.9 Gegeben zwei Punkte x, y im Inneren eines Kreises K, konstruiere den Kreis L, mit $x, y \in L$ und $L \perp K$. Mithilfe dieser Technik kannst du nun hyperbolische Gerade im Kreisscheibenmodell von Poincaré konstruieren.