1 Vollständige Induktion

1.1 Summenformeln

Beispiel Zu zeigen ist, dass für alle positiven ganzen Zahlen n gilt

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Beweis

Induktionsanfang Sei $n = 1$. Es gilt direkt die Behauptung mit $1 \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$.

Induktionsschritt

Induktionsvoraussetzung Es gelte $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$..

Induktionsbehauptung Es gilt auch $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) + (n+1) \cdot (n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$..

Induktionsbeweis Durch das Ersetzen des bekannten Teils der Summe erhalten wir

$$\begin{aligned}
&1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) + (n+1) \cdot (n+2) \\
=& \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1) \cdot (n+2) \\
=& n \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{3} + 3 \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{3} \\
=& \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}
\end{aligned}$$

■

1.2 Teilbarkeit

Bemerkung Für „*a teilt b*“ schreiben wir im Folgenden auch $a \mid b$.

Beispiel Wir wollen zeigen, dass $n^3 - n$ für alle positiven ganzen n durch 3 teilbar ist.

Beweis

Induktionsanfang Sei $n = 1$. Daher folgt $n^3 - n = 1^3 - 1 = 0$ und wegen $3 \mid 0$ auch insbesondere $3 \mid (n^3 - n)$.

Induktionsschritt

Induktionsvoraussetzung Es gelte $3 \mid (n^3 - n)$.

Induktionsbehauptung Es gilt auch $3 \mid ((n+1)^3 - (n+1))$.

Induktionsbeweis Ausmultiplizieren und geschicktes Zusammenfassen ergibt

$$\begin{aligned}(n+1)^3-(n+1) &= (n^3+3n^2+3n+1)-(n+1)\\ &= n^3+3n^2+2n\\ &= n^3-n+3n^2+3n\\ &= (n^3-n)+3(n^2+n)\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt $3 \mid (n^3-n)$. Offensichtlich teilt 3 jedoch auch $3(n^2+n)$. Also muss auch die Summe $(n^3-n)+3(n^2+n) = (n+1)^3-(n+1)$ durch 3 teilbar sein.

■

Beispiel Es gilt, dass n^5-n für alle positiven ganzen n durch 5 teilbar ist.

Beweis

Induktionsanfang Sei $n=1$. Daher folgt $n^5-n = 1^5-1 = 0$ und wegen $5 \mid 0$ auch insbesondere $5 \mid (n^5-n)$.

Induktionsschritt

Induktionsvoraussetzung Es gelte $5 \mid (n^5-n)$.

Induktionsbehauptung Es gilt auch $5 \mid ((n+1)^5-(n+1))$.

Induktionsbeweis Wieder multiplizieren wir aus und fassen geschickt zusammen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}(n+1)^5-(n+1) &= (n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n+1)-(n+1)\\ &= n^5+5n^4+10n^3+10n^2+4n\\ &= n^5-n+5n^4+10n^3+10^2+5n\\ &= (n^5-n)+5(n^4+2n^3+2n^2+n)\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt $5 \mid (n^5-n)$. Natürlich teilt 5 jedoch auch $5(n^4+2n^3+2n^2+n)$. Wieder folgt daraus, dass auch die Summe $(n^5-n)+5(n^4+2n^3+2n^2+n) = (n+1)^5-(n+1)$ durch 5 teilbar ist.

■

Beispiel Für alle nichtnegativen ganzen Zahlen n gilt $4 \mid (3n^2+n^4)$.

Beweis Die Details bleiben als Hausaufgabe dem geneigten Leser überlassen. ■