Kapitel 1

Maßtheorie

Der Bereich ist Maßtheorie beschäftigt sich grundsätzlich mit einer besonderen Art von Abbildungen, den Maßen. Ein Maß ordnet einer Menge eine nichtnegative Zahl zu. Dieser Wert kann als die „Größe“ der Menge gedeutet werden, eine oft bessere Vorstellung ist aber die, der „Masse“ der Menge. Beispiele von Maßen sind:

1. Länge, Flächeninhalt, Volumen, etc.

2. Wahrscheinlichkeitsmaße.

3. Das Zählmaß (die Anzahl der Elemente einer Menge).

4. Winkelmaße.

Zählmaße sind sehr einfache Beispiele und werden deshalb nicht stärker betrachtet. Es ist einfach die Mächtigkeit einer Menge. Winkelmaße sind Spezialfälle für die Geometrie und ebenfalls nicht von fundamentaler Bedeutung. Wir konzentrieren und hauptsächlich auf die ersten beiden Beispiele.

1.1 Das Lebesgue-Maß

Die Bezeichnung „Lebesgue-Maß“ ist technisch gesehen etwas irreführend, weil damit eigentlich eine ganze Familie von Maßen gemeint ist. Ein Quadrat mit Seitenlänge a im $\mathbb{R}^2$ mag einen Flächeninhalt von a^2 haben, aber ein Volumen von 0. Die Dimension hat einen Einfluss und deshalb ist es sinnvoll für jede Dimension n ein gesonderten Lebesgue-Maß zu haben. Wir schreiben $\lambda^n(A)$ für eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$, um die n-dimensionale *Masse* der Menge A zu bezeichnen. In niedrigen Dimensionen haben wir speziellere Bezeichnungen.

- λ^1 ist die Gesamtlänge.

- λ^2 ist der Gesamtflächeninhalt.

- λ^3 ist das Gesamtvolumen.

Stell dir dabei vor, dass die Menge A uniform aus irgendeinem Material besteht, Metall zum Beispiel. Es ist für die Vorstellung egal was für ein Material es ist, aber es ist wichtig, dass es eine gleichmäßig verteilte Dichte aufweist.

1.1.1 Der Satz von Vitali

Ein solches Maß wie das Lebesgue-Maß sollte selbstverständlich einige intuitive Eigenschaften besitzen. Unter anderem die folgenden:

I Die leere Menge hat Masse 0. Das bedeutet $\lambda^n(\emptyset) = 0$.

II Masse ist translationsinvariant. Das heißt, wenn wir ein Objekt im Raum verschieben, dann ändert sich dessen Masse nicht. Für $v \in \mathbb{R}^n$ und $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt dann

$$\lambda^n(A + v) = \lambda^n(A),$$

wobei $A + v = \{a + v : a \in A\}$.

III Masse ist σ-additiv. Das heißt für eine höchstens abzählbare Familie von *paarweise disjunkten* Mengen $A_1, A_2, \ldots \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt

$$\lambda^n\left(\coprod_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^n(A_j).$$

IV Die Masse bzw. das n-dimensionale Volumen eines Quaders ist das Produkt der Seitenlängen. Konkret heißt das

$$\lambda\left([a_k, b_k]^n\right) = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k).$$

Warum III? Die Eigenschaften I, II und IV sind wahrscheinlich leicht zu motivieren. Eigenschaft III wirkt jedoch vergleichsweise mächtig, da es auch für unendliche viele Mengen gelten soll. Zu diesem Punkt gibt es eine Aufgabe.

Aufgabe 1.1.1 Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks möglichst genau mithilfe der Abbildung 1.1.1. Erkläre wie wir beliebig nahe an das korrekte Ergebnis gelangen könnten und warum wir dafür Eigenschaft III benötigen.

Die Zielstellung könnte nun lauten ein solches Maß zu finden, sodass die Eigenschaften I-IV erfüllt sind. Zerschlagend kommt dann allerdings der Satz von Vitali daher, welcher besagt, dass genau das nicht möglich ist.

Satz von Vitali Es gibt keine Abbildung $\lambda^n : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0,\infty]$, die I-IV erfüllt.

Wir beweisen diesen Satz im Fall $n = 1$ (der allgemeine Fall geht exakt genauso) durch folgende Aufgaben.

Aufgabe 1.1.2 Beweise, dass $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 1.1.3 Sei $R \subseteq [0,1]$ eine Menge von Repräsentanten bzgl. der vorigen Äquivalenzrelation. Betrachte die Menge

$$A = \bigsqcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (R + q).$$

Bestimme $\lambda^1(A)$ in den Fällen

1. $\lambda^1(R) = 0$.
2. $\lambda^1(R) > 0$.

Aufgabe 1.1.4 Beweise, dass aus III die folgende Eigenschaft folgt: Wenn $A \subseteq B$, dann $\lambda^n(A) \le \lambda^n(B)$.

Aufgabe 1.1.5 Begründe $[0,1] \subseteq A \subseteq [-1,2]$. Wo liegt der Widerspruch?

Aufgabe 1.1.6 Welche Voraussetzung des Satzes von Vitali ist deiner Meinung nach zu stark?

Antwort Der Definitionsbereich $2^{\mathbb{R}^n}$.

1.1.2 Einschub: Mengensysteme

Ein Mengensystem ist eine Menge von Mengen. Wir nennen ein Mengensystem $\mathscr{M}$

- $\cup$-stabil, wenn $A \cup B \in \mathscr{M}$
- $\cap$-stabil, wenn $A \cap B \in \mathscr{M}$
- $\setminus$-stabil, wenn $A \setminus B \in \mathscr{M}$ und
- $\bullet^c$-stabil, wenn $A^c \in \mathscr{M}$

für jeweils alle $A, B \in \mathscr{M}$.

Beispiele Die Potenzmenge einer Menge erfüllt offenbar alle diese Eigenschaften. Die Leere Menge ebenso. Die Menge $\{\{1,2\},\{1\},\{2\},\emptyset\}$ (bzgl. der Grundmenge $\{1,2\}$) ist $\cup$- und $\bullet^c$-stabil, aber weder $\cap$- noch $\setminus$-stabil. Bemerke, dass für die Komplementbildung die Angabe der Grundmenge wichtig ist.

Aufgabe 1.1.7 Wir haben 4 Eigenschaften an Mengensysteme. Welche Implikationen gelten zwischen diesen? Welche Kombinationen sind alles möglich? *Tipp: Es gibt insgesamt 8. Finde zu jedem ein Beispiel*

Ein Mengensystem $\mathscr{M}$ heißt

- Verband, wenn es $\cup$- und $\cap$-stabil ist.
- Ring, wenn es $\cup$- und $\setminus$-stabil ist.
- Algebra, wenn es $\cup$- und $\bullet^c$-stabil ist.

In einer Algebra sind endliche Vereinigungen kein Problem. Aber für unser Maßproblem werden wir auch abzählbare Vereinigungen betrachten. Aus diesem Grund betrachten wir eine Verschärfung der Begriffe. Ein Mengensystem heißt

- σ-$\cup$-stabil, wenn $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{M}$ und
- σ-$\cap$-stabil, wenn $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{M}$

für alle $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{M}$. Ist es σ-$\cup$- und $\bullet^c$-stabil und enthält die leere Menge, dann nennen wir es eine σ-Algebra.

Aufgabe 1.1.8 Begründe, dass eine σ-Algebra alle in diesem Kapitel eingeführten Eigenschaften besitzt.

1.1.3 Das Prinzip der guten Mengen

In diesem Kapitel lernen wir eines der zwei Schlüsselwerkzeuge der Maßtheorie kennen. Dafür müssen wir zunächst zwei weitere Begriffe einführen.

Dynkin-Systeme Ein Mengensystem $\mathscr{D} \subseteq 2^{\Omega}$ heißt Dynkin-System, wenn es die folgenden 3 Eigenschaften besitzt:

D1 $\Omega \in \mathscr{D}$

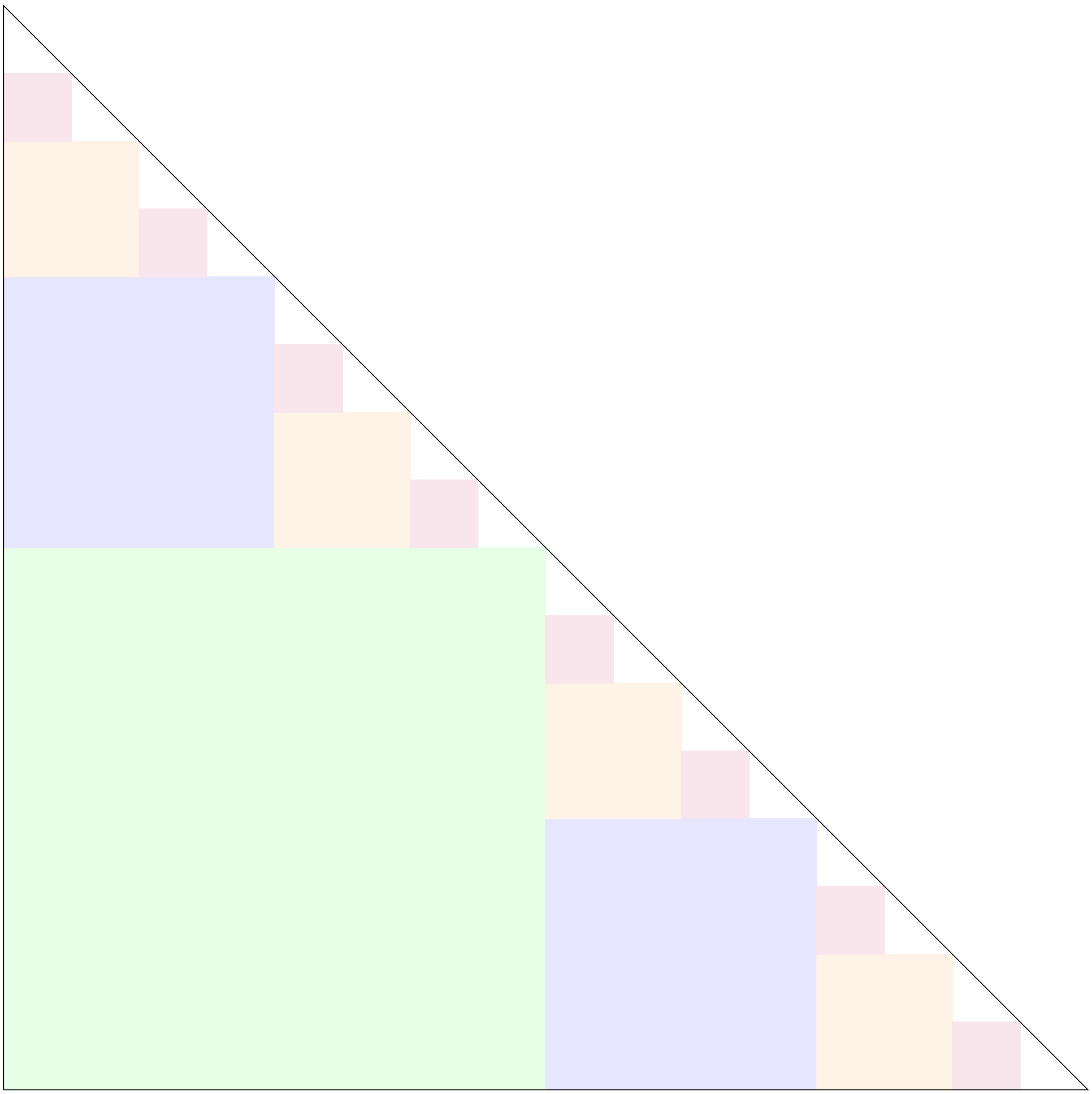

Abbildung 1.1: Ein gleichschenkliges Dreieck mit Schenkellänge 16.

D2 $A \setminus B \in \mathscr{D}$ für $A, B \in \mathscr{D}$ mit $B \subseteq A$

D3 $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{D}$ für *paarweise disjunkte* $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{D}$.

Aufgabe 1.1.9 Zeige, dass ein $\cap$-stabiles Dynkin-System eine σ-Algebra ist.

Für ein beliebiges Mengensystem $\mathscr{E} \subseteq 2^{\Omega}$ bezeichnen wir mit

- $\delta(\mathscr{E})$ das kleinste Dynkin-System, welches $\mathscr{E}$ enthält und
- $\sigma(\mathscr{E})$ die kleinste σ-Algebra, welche $\mathscr{E}$ enthält.

In diesem Fällen bezeichnen wir $\mathscr{E}$ als *Erzeuger*.

Dynkin-Lemma Ist der Erzeuger $\mathscr{E}$ $\cap$-stabil, dann gilt $\delta(\mathscr{E}) = \sigma(\mathscr{E})$.

Beweis Da jede σ-Algebra auch ein Dynkin-System ist, gilt $\delta(\mathscr{E}) \subseteq \sigma(\mathscr{E})$. Es genügt nun zu zeigen, dass $\delta(\mathscr{E})$ eine σ-Algebra bildet.

Wir wollen nun zeigen, dass $A \cap B \in \delta(\mathscr{E})$ für $A, B \in \delta(\mathscr{E})$. Dafür zeigen wir aber zuerst $A \cap E \in \delta(\mathscr{E})$ für $A \in \delta(\mathscr{E})$ und $E \in \mathscr{E}$.

Wir betrachten nun

$$\mathscr{D} = \{A \in \delta(\mathscr{E}) : \forall E \in \mathscr{E} : A \cap E \in \delta(\mathscr{E})\}$$

Aufgabe 1.1.10 Zeige, dass $\mathscr{D}$ ein Dynkin-System ist, welches $\mathscr{E}$ enthält.

Offenbar gilt $\mathscr{D} \subseteq \delta(\mathscr{E})$. Da $\mathscr{D}$ aber auch ein Dynkin-System ist, welches $\mathscr{E}$ enthält und $\delta(\mathscr{E})$ das kleinste Dynkin-System ist, welches $\mathscr{E}$ enthält, gilt auch $\delta(\mathscr{E}) \subseteq \mathscr{D}$. Damit folgt $\mathscr{D} = \delta(\mathscr{E})$. Und das ist gleichbedeutend mit $A \cap E \in \delta(\mathscr{E})$ für alle $A \in \delta(\mathscr{E})$ und $E \in \mathscr{E}$ $(*)$.

Definiere nun

$$\mathscr{D}^* = \{A \in \delta(\mathscr{E}) : \forall D \in \delta(\mathscr{E}) : A \cap D \in \delta(\mathscr{E})\}$$

Aufgabe 1.1.11 Zeige nun, dass $\delta(\mathscr{E})$ $\cap$-stabil ist. Gehe dabei wie in voriger Aufgabe vor.

Wie funktioniert das Prinzip? Gegeben sei eine Aussage $\phi(A)$ über Mengen und eine σ-Algebra $\mathscr{A}$.

Ziel: Zeige $\phi(A)$ ist wahr für alle $A \in \mathscr{A}$.

Trick: Zeige nur $\phi(A)$ ist wahr für alle $A \in \mathscr{E}$ für einen $\cap$-stabilen Erzeuger von $\mathscr{A}$ $(\sigma(\mathscr{E}) = \mathscr{A})$. Betrachte nun

$$\mathscr{D} = \{A \in \mathscr{A} : \phi(A) \text{ ist wahr}\}$$

(Das System der guten Mengen). Zeige nun $\mathscr{D}$ ist ein Dynkin-System. Daraus folgt nun der Rest.

Wieso funktioniert das? Wir haben $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{D} \subseteq \sigma(\mathscr{E})$ und $\mathscr{D}$ ist ein Dynkin-System. Damit folgt per Definition $\delta(\mathscr{E}) \subseteq \mathscr{D} \subseteq \sigma(\mathscr{E})$. Aber nach dem Dynkinlemma gilt $\delta(\mathscr{E}) = \sigma(\mathscr{E})$. Damit folgt $\mathscr{D} = \sigma(\mathscr{E}) = \mathscr{A}$, also ist $\phi(A)$ für alle $A \in \mathscr{A}$ wahr.

Aufgabe 1.1.12 Beweise: Für eine beliebige Abbildung $f : X \to Y$ und einem $\cap$-stabilen Erzeuger $\mathscr{E} \subseteq 2^Y$ gilt

$$f^{-1}(\sigma(\mathscr{E})) = \sigma(f^{-1}(\mathscr{E})).$$

1.1.4 Maße

In diesem Kapitel werfen wir einen Blick auf das Ziel. Unser Vorhaben war es, ein geeignetes Maß für ein Mengensystem im $\mathbb{R}^n$ zu finden, das so groß ist wie möglich. Was genau ist ein Maß?

Definition Sei $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra. Ein Maß ist eine Abbildung $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$, die folgende 2 Eigenschaften erfüllt.

M1 Es gilt $\mu(\emptyset) = 0$.

M2 Für alle $A_1, A_2, \ldots$ paarweise disjunkt gilt

$$\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

Die Eigenschaft **(M2)** wird auch als σ-Additivität bezeichnet.

Aufgabe 1.1.13 Eine Funktion $\mathscr{A} \to [0, \infty]$ heißt additiv, wenn für disjunkte $A, B \subseteq \mathscr{A}$ gilt $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Zeige, dass Maße additiv sind.

Aufgabe 1.1.14 Eine Funktion $\mathscr{A} \to [0, \infty]$ heißt σ-subadditiv, wenn für $A_1, A_2, \ldots \subseteq \mathscr{A}$ gilt

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Zeige, dass Maße σ-subadditiv sind.

Aufgabe 1.1.15 Angenommen wir hätten bereits ein funktionierendes Maß μ auf den reellen Zahlen gefunden, sodass

- $\mu\big((a,b)\big) = b - a$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

Wir nehmen nun auch an, dass $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ messbar ist, also $\mu(\mathbb{Q})$ existiert. Zeige, dass $\mu(\mathbb{Q}) = 0$ sein muss.

Tipp: Nutze die Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ und die Subadditivität von μ.

Wir zeigen nun eine Art Stetigkeit von Maßen. Dazu zwei Notationen:

- Für $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$ und $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ schreiben wir $A_k \uparrow A$.
- Für $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$ und $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ schreiben wir $A_k \downarrow A$.

Falls nun $A_k \uparrow A$, dann gilt $\mu(A_k) \to \mu(A)$ für $k \to \infty$.

Beweis dazu Also offenbar haben wir zunächst $\mu(A_k) \leq \mu(A)$ für alle k und damit

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) \leq \mu(A).$$

Es bleibt die andere Ungleichung zu zeigen. Wir nehmen dabei an, dass $\mu(A_k) < \infty$ für alle k. (Warum?)

Definiere $A_0 = \emptyset$ und $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$.

Aufgabe 1.1.16 Zeige $\mu(B_k) = \mu(A_k) - \mu(A_{k-1})$.

Nun rechnen wir

$$\begin{aligned}
\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) - \mu(A_{k-1}) \\
&= \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) - \mu(A_0) \\
&= \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)
\end{aligned}$$

Aufgabe 1.1.17 Begründe, warum aus $A_k \downarrow A$ nicht automatisch $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu(A)$ folgt.

Aufgabe 1.1.18 Betrachte nun $A_k \downarrow A$ mit $\mu(A_1) < \infty$. Zeige, dass nun $\mu(A_k) \to \mu(A)$ für $k \to \infty$ gilt. Begründe dafür zunächst $(A_1 \setminus A_k) \uparrow (A_1 \setminus A)$.

Das Highlight dieses Kapitels ist der Eindeutigkeitssatz für Maße. Angenommen du hättest ein Maß $\mu : \mathscr{A} \to [0,\infty]$ und kennst die Werte von μ bereits auf $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{A}$. Unter welchen Voraussetzungen kennst du nun das gesamte Maß? Hier ist ein Beispiel.

Sei $\Omega = \{1,2,3\}$ und $\mathbb{P} : 2^{\Omega} \to [0,1]$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß (das heißt $\mathbb{P}(\Omega) = 1$) mit

- $\mathbb{P}(\{1\}) = 1/2$,
- $\mathbb{P}(\{2\}) = 1/3$ und
- $\mathbb{P}(\{3\}) = 1/6$.

Reichen diese Angaben, um $\mathbb{P}$ vollständig festzulegen? Ja, denn alle Teilmengen in 2^{Ω} lassen sich als Vereinigung von diesen drei Mengen schreiben und die Maße sind dann durch die Additivität festgelegt. Zum Beispiel ist

$$\mathbb{P}(\{1,2\}) = \mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Um ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\Omega \subseteq \mathbb{N}$ festzulegen, scheint es zu genügen, die einelementigen Teilmengen zu bestimmen. Tatsächlich wird für die Binomialverteilung auf $\{0,\ldots,n\}$ oder der Gleichverteilung oft eine sogenannte „Zähldichte“ gegeben, welche dann genügt, um alles über die Wahrscheinlichkeiten auszusagen. Aber dazu später vielleicht mehr.

Wir sehen also, dass es nicht nötig zu sein scheint, ein Maß für alle Mengen zu definieren, die messbar sind. Es reicht eine hinreichend große erzeugende Klasse zu finden. Das werden die $\cap$-stabilen Erzeuger sein, die wir letztes Kapitel kennengelernt haben.

Eindeutigkeitssatz für endliche Maße Seien $\mu, \mu' : \mathscr{A} \to [0,\infty)$ Maße mit $\mu(\Omega) = \mu'(\Omega) < \infty$ und $\mathscr{E}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathscr{A}$. Falls nun $\mu(E) = \mu'(E)$ für alle $E \in \mathscr{E}$, dann folgt $\mu \equiv \mu'$.

Beweis Betrachte

$$\mathscr{D} = \{A \in \mathscr{A} : \mu(A) = \mu'(A)\}.$$

Offenbar ist $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{D}$. Es bleibt zu zeigen, dass $\mathscr{D}$ ein Dynkin-System ist, da dann aus dem Prinzip der guten Mengen folgt, dass $\mu(A) = \mu'(A)$ für alle $A \in \mathscr{A}$, und damit $\mu \equiv \mu'$.

Aufgabe 1.1.19 Zeige, dass $\mathscr{D}$ ein Dynkin-System ist.

Wir wollen uns nun jedoch nicht nur mit endlichen Maßen, also $\mu(\Omega) < \infty$, beschäftigen, sondern eine größere Klasse von Maßen betrachten. Als Motivation dafür nehmen wir das Zählmaß $\mu(M) = |M|$ zur Hand, bei welchem wir einfach die Anzahl der Elemente einer Menge zählen.

Betrachten wir also zum Beispiel $\Omega = \{1,\dots,10\}$, so gilt $\mu(\Omega) = 10$. Genauso stellen wir fest, dass $\mu(\{1,5,7,8\}) = 4$ und $\mu(\{2,3\}) = 2$. Interessanterweise würde dies auch stimmen, wenn wir μ stattdessen als Zählmaß auf $\Omega' = \{1,\dots,100\}$ oder sogar $\{1,\dots,1000\}$ definiert hätten. Daher liegt es nahe, dass wir μ direkt auf allen Teilmengen $2^{\mathbb{N}}$ von $\mathbb{N}$ definieren wollen, was jedoch nicht mit einem endlichen Maß geht, da $\mathbb{N}$ (abzählbar) unendliche viele Zahlen enthält, und damit $\mu(\mathbb{N}) = \infty$ gelten muss.

Warum ist dies jetzt aber überhaupt ein Problem? Wenn wir anfangen, dass Zählmaß auf $\mathbb{N}$ zu definieren, so haben wir folgende Konstruktion: für jede endliche Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$ setzen wir $\mu(A) = |A|$. Jetzt stellt sich die Frage, ob dies das Maß μ auf $\mathbb{N}$ bereits eindeutig definiert, und ob daraus für unendliche Mengen auch direkt $A \subseteq \mathbb{N}$ auch $\mu(A) = \infty$ folgt. Um beide Fragen zu beantworten, brauchen wir zuerst folgende Definition, welche zu unserer Idee der verschiedenen Ω von vorher zusammenpasst.

Definition Sei $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra auf Ω und $\mu : \mathscr{A} \to [0,\infty]$ ein Maß mit mit $\mu(\Omega) = \infty$. Wir nennen μ **σ-endlich**, wenn es eine Folge von Mengen $(A_k)_k$ gibt, so dass $A_k \uparrow \Omega$ und $\mu(A_k) < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Folge $(A_k)_k$ wird auch Ausschöpfung von Ω genannt.

Wir sehen direkt, dass unser μ, welches wir für alle endlichen Mengen definiert haben, σ-endlich ist, indem wir $A_k = \{1,\dots,k\}$ und damit $\mu(A_k) = |A_k| = k$ wählen. Dass dies unser Maß μ auf ganz $2^{\mathbb{N}}$ eindeutig charakterisiert, folgt nun aus dem folgendem verallgemeinerten Eindeutigkeitssatz.

Eindeutigkeitssatz für σ-endliche Maße Seien $\mu, \mu' : \mathscr{A} \to [0,\infty)$ Maße, $\mathscr{E}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathscr{A}$ und $E_k \uparrow \Omega$ eine Ausschöpfung von Ω mit $E_k \in \mathscr{E}$. Falls nun $\mu(E) = \mu'(E)$ für alle $E \in \mathscr{E}$ und insbesondere $\mu(E_k) = \mu'(E_k) < \infty$, dann folgt $\mu \equiv \mu'$.

Beweis Wir betrachten für alle $k \in \mathbb{N}$ die Einschränkungen $\mu|_{E_k}$ und $\mu'|_{E_k}$ der Maße μ und μ' auf die Menge E_k. Dies bedeutet, dass wir statt A̧ das Mengensystem

$$\mathscr{A}_k = \{A \cap E_k : A \in \mathscr{A}\}$$

betrachten. Insbesondere sind die Maße $\mu|_{E_k}$ und $\mu'|_{E_k}$ endlich, da $\mu|_{E_k} = \mu'|_{E_k} < \infty$. Zusätzlich betrachten wir auch die folgenden Einschränkungen unseres $\cap$-stabilen Erzeugers $\mathscr{E}$

$$\mathscr{E}_k = \{E \cap E_k : E \in \mathscr{E}\}.$$

Aufgabe 1.1.20 Zeige, dass $\mathscr{E}_k$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathscr{A}_k$ ist. Leite daraus ab, dass $\mu|_{E_k}$ und $\mu'|_{E_k}$ als Maße auf $\mathscr{A}_k$ zusammen mit dem $\cap$-stabilen Erzeuger $\mathscr{E}_k$ die Voraussetzungen des Eindeutigkeitssatzes für endliche Maße erfüllen, und folgere daraus $\mu|_{E_k} \equiv \mu'|_{E_k}$.

Aufgabe 1.1.21 Zeige, dass daraus auch $\mu \equiv \mu'$ folgt, indem du für beliebige Mengen $A \in \mathscr{A}$ die Ausschöpfung $A \cap E_k \uparrow A$ betrachtest, und dann über die Stetigkeit von μ und μ' argumentierst.

1.1.5 Von Inhalten zu Maßen

Wir sind nun bereit das Lebesgue-Maß zu konstruieren. Die Konstruktion basiert auf den Arbeiten des Mathematikers *Constantin Carathéodory (*1873 Berlin, †1950 München).*

Definition Eine Abbildung $\mu^* : 2^{\Omega} \to [0,\infty]$ heißt äußeres Maß, wenn

I $\mu^*(A) \geq 0$ für alle $A \in 2^{\Omega}$,

II $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ für alle $A, B \in 2^{\Omega}$ und

III $\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$ für alle $A_1, A_2, \dots \in 2^{\Omega}$.

Konstruktion von äußeren Maßen Sei $\mathscr{E} \subseteq 2^{\Omega}$ eine *Algebra* und $\rho : \mathscr{E} \to [0,\infty]$ eine Funktion mit $\rho(\emptyset) = 0$. Dann ist

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \rho(E_j) : A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, E_j \in \mathscr{E}\right\}$$

ein äußeres Maß.

Aufgabe 1.1.22 Weise I und II nach.

Tipp zu II: Begründe, dass jede Überdeckung von B auch eine Überdeckung von A ist.

Beweis von III Seien $A_1, A_2, \dots \in 2^{\Omega}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Für jedes k gibt es dann eine Kollektion von Mengen $E_1^{(k)}, E_2^{(k)}, \dots \in \mathscr{E}$, sodass $A_k \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j^{(k)}$ und

$$\sum_{j=1}^{\infty} \rho(E_j^{(k)}) \leq \mu^*(A_k) + \varepsilon \cdot 2^{-k}.$$

Jetzt ist $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j^{(k)}$ und damit per Definition

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E_j^{(k)}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, muss die σ-Subadditivität folgen.

Erweiterung Falls ρ sogar σ-additiv ist (wo es möglich ist), dann gilt $\mu^*(E) = \rho(E)$ für alle $E \in \mathscr{E}$.

Beweis Sei $E \in \mathscr{E}$ beliebig. Offenbar ist E eine Überdeckung von sich selbst, also gilt $\mu^*(E) \leq \rho(E)$. Es bleibt die andere Richtung zu zeigen. Sei $E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ mit $E_k \in \mathscr{E}$. Es gibt nun eine Überdeckung durch Mengen $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \ldots$ sodass diese paarweise disjunkt sind und $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{E}_k$.

Aufgabe 1.1.23 Begründe den letzten Satz und beende den Beweis.

Wir können nun also sogenannte σ-Inhalte (Abbildungen $\rho : \mathscr{E} \to [0,\infty]$ mit $\rho(\emptyset) = 0$ und σ-additiv) zu äußeren Maßen auf der gesamten Potenzmenge erweitern.

Messbare Mengen nach Carathéodory Wir bezeichnen nun eine Menge $A \in 2^{\Omega}$ als μ^**-messbar*, wenn für jede Teilmenge $O \in 2^{\Omega}$ gilt

$$\mu^*(O) = \mu^*(O \cap A) + \mu^*(O \setminus A).$$

Diese Definition ist äußerst genial, denn sie ermöglicht alles, was wir uns erhoffen können.

Erweiterungssatz von Carathéodory Es sei $\mathscr{E} \subseteq 2^{\Omega}$ eine *Algebra* und $\rho : \mathscr{E} \to [0,\infty]$ ein σ-Inhalt. Dann gibt es eine σ-Algebra $\mathscr{A}$ und ein *vollständiges* Maß $\mu : \mathscr{A} \to [0,\infty]$ mit $\rho(E) = \mu(E)$ für alle $E \in \mathscr{E}$.

Was *vollständig* bedeutet, klären wir am Ende des Beweises. Nimmt man zusätzlich an, dass ρ auch σ-endlich ist, dann erhalten wir durch den Eindeutigkeitssatz, dass die hier gefundene Erweiterung ebenfalls eindeutig ist.