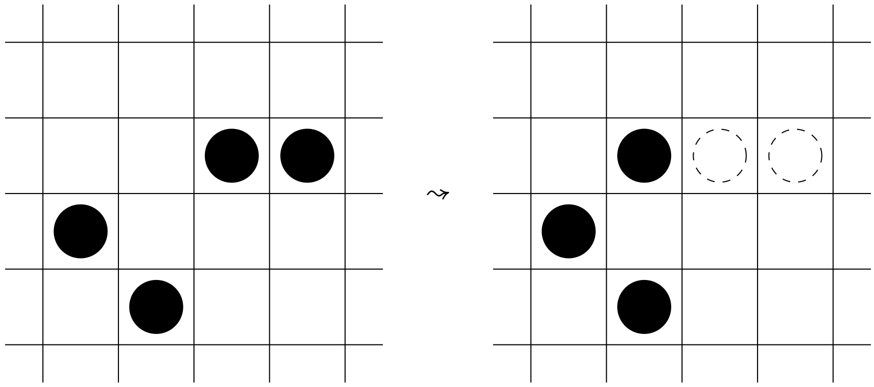

Abbildung 1: Bewegung eines Spielsteins.

Conways Soldaten

Wir beenden unsere Lektion zum Spiel *Conways Soldaten* (englisch: *Conway's soldiers*). Zunächst nochmal einmal die Regeln. Gespielt wird auf einem unendlichen Schachbrett oder Gitter. Es ist eine besondere horizontale Linie markiert. Vor Beginn des Spiel werden beliebig viele Spielsteine (*Soldaten*) unter der Linie platziert, sodass auf jedem Feld unter der Linie maximal ein Spielstein liegt. Nach Beginn des Spiels dürfen keine weiteren Spielstein hinzugefügt werden. Der einzige erlaubte Zug ist das Springen eines Steins über einen anderen (siehe Abbildung 1).

Ziel ist es so weit wie möglich über die Linie zu gelangen. Beispielhaft ist in Abbildung 2 zu sehen, wie man mit 4 Steinen die zweite Reihe erreichen kann.

Aufgabe 1 Erreiche die Reihen 3 und 4. Kannst du Reihe 5 erreichen?

Der Mathematiker *John Conway* hatte als erster bewiesen, dass es nicht möglich ist die fünfte Reihe zu erreichen. Bemerkungen zu seiner Person: *John Horton Conway* wurde 1937 in Liverpool geboren. Er forschte zunächst viel im Gebiet der Zahlentheorie, wandte sich jedoch später der Gruppentheorie zu. Bekannt machte ihn vor allem die Entwicklung des *Game of Life*, welches jedem Informatikschüler ein Begriff sein sollte, aber auch seine Erfolge in der Klassifikation endlicher einfacher Gruppen und der Entdeckung der surrealen Zahlen. Er starb vor kurzem, am 11. April 2020 an den Folgen von COVID-19.

Für den Beweis entwickeln wir eine sogenannte *Monovariante*, eine Größe, die sich im Laufe des Spiels nur in eine Richtung bewegen wird. Wir werden die Felder des Schachbretts mit Zahlen belegen, sodass die Summe aller Zahlen, die mit Steinen belegt sind, im Laufe des Spiels nur sinken kann. Dann werden wir die Zahlen in den Felder zusammenrechnen, um zu untersuchen, wieviel „Masse“ uns unter der Linie überhaupt zur Verfügung steht.

Zur Strategie: Wir müssen unendlich viele Zahlen addieren. Deshalb werden wir die Zahlen so wählen, dass sich eine geometrische Reihe ergibt. Erinnere dich, dass für $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ die folgende Formel gilt.

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

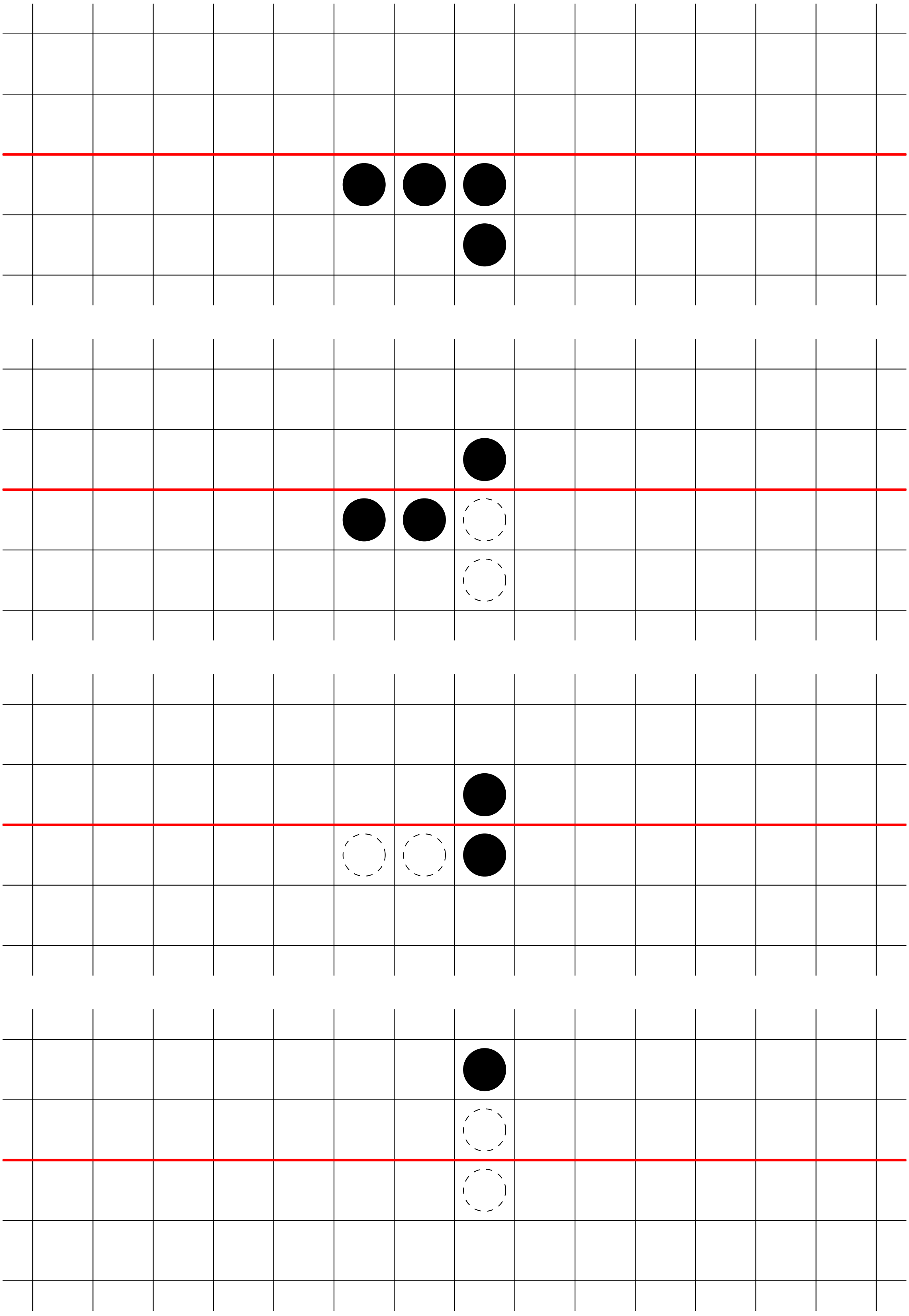

Abbildung 2: Spielfolge mit der ein Stein in 4 Zügen die zweite Reihe erreicht.

Die Herleitung haben wir bereits vollbracht, deswegen beschleunigen wir diesen Prozess hier. Sei ϕ die positive Lösung der Gleichung $x^2 = x + 1$, ϕ heißt der *goldene Schnitt*. Definiere $\psi = \frac{1}{\phi}$.

Aufgabe 2 Schreibe ψ in reduzierter Form (das heißt ohne eine Wurzel im Nenner).

Aufgabe 3 Beweise, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\psi^{n+2} + \psi^{n+1} = \psi^n.$$

Wir können nun den Beweis angehen. Nehmen wir zuerst an, es wäre möglich die fünfte Reihe zu erreichen. Dann schreiben wir auf dieses Feld eine 1 und von da ausgehend $\psi, \psi^2, \ldots$ usw. nach außen hin. Siehe dazu die Abbildung 3.

Wir definieren die *Masse* eine Spielsteins als die Zahl auf die er liegt. Die *Gesamtmasse* ist die Summe der *Massen* aller Spielsteine auf dem Schachbrett.

Aufgabe 4 Beweise, dass die *Gesamtmasse* eine sinkende *Monovariante* ist. Das bedeutet die *Gesamtmasse* wird nach einem Spielzug nicht erhöht.

Aufgabe 5 Berechne die kleinste obere Schranke für die *Gesamtmasse* zum Spielstart. Das ist genau die *Gesamtmasse*, wenn alle Spielfelder unter der roten Linie besetzt wären.

Tipp: Berechne zuerst die Gesamtmasse einer Zeile und folgere daraus auf die Masse der anderen Zeilen. Addiere dann die Massen aller Zeilen unter der roten Linie zusammen.

Aufgabe 6 Folgere aus den Erkenntnissen von Aufgabe 4 und 5, dass es unmöglich ist, das Feld mit der 1 in endlich vielen Zügen zu erreichen.

ψ^8	ψ^7	ψ^6	ψ^5	ψ^4	ψ^3	ψ^2	ψ^3	ψ^4	ψ^5	ψ^6	ψ^7	ψ^8	ψ^9
ψ^7	ψ^6	ψ^5	ψ^4	ψ^3	ψ^2	ψ^1	ψ^2	ψ^3	ψ^4	ψ^5	ψ^6	ψ^7	ψ^8
ψ^6	ψ^5	ψ^4	ψ^3	ψ^2	ψ^1	1	ψ^1	ψ^2	ψ^3	ψ^4	ψ^5	ψ^6	ψ^7
ψ^7	ψ^6	ψ^5	ψ^4	ψ^3	ψ^2	ψ^1	ψ^2	ψ^3	ψ^4	ψ^5	ψ^6	ψ^7	ψ^8
ψ^8	ψ^7	ψ^6	ψ^5	ψ^4	ψ^3	ψ^2	ψ^3	ψ^4	ψ^5	ψ^6	ψ^7	ψ^8	ψ^9
ψ^9	ψ^8	ψ^7	ψ^6	ψ^5	ψ^4	ψ^3	ψ^4	ψ^5	ψ^6	ψ^7	ψ^8	ψ^9	ψ^{10}
ψ^{10}	ψ^9	ψ^8	ψ^7	ψ^6	ψ^5	ψ^4	ψ^5	ψ^6	ψ^7	ψ^8	ψ^9	ψ^{10}	ψ^{11}
ψ^{11}	ψ^{10}	ψ^9	ψ^8	ψ^7	ψ^6	ψ^5	ψ^6	ψ^7	ψ^8	ψ^9	ψ^{10}	ψ^{11}	ψ^{12}
ψ^{12}	ψ^{11}	ψ^{10}	ψ^9	ψ^8	ψ^7	ψ^6	ψ^7	ψ^8	ψ^9	ψ^{10}	ψ^{11}	ψ^{12}	ψ^{13}
ψ^{13}	ψ^{12}	ψ^{11}	ψ^{10}	ψ^9	ψ^8	ψ^7	ψ^8	ψ^9	ψ^{10}	ψ^{11}	ψ^{12}	ψ^{13}	ψ^{14}
ψ^{14}	ψ^{13}	ψ^{12}	ψ^{11}	ψ^{10}	ψ^9	ψ^8	ψ^9	ψ^{10}	ψ^{11}	ψ^{12}	ψ^{13}	ψ^{14}	ψ^{15}
ψ^{15}	ψ^{14}	ψ^{13}	ψ^{12}	ψ^{11}	ψ^{10}	ψ^9	ψ^{10}	ψ^{11}	ψ^{12}	ψ^{13}	ψ^{14}	ψ^{15}	ψ^{16}
ψ^{16}	ψ^{15}	ψ^{14}	ψ^{13}	ψ^{12}	ψ^{11}	ψ^{10}	ψ^{11}	ψ^{12}	ψ^{13}	ψ^{14}	ψ^{15}	ψ^{16}	ψ^{17}
ψ^{17}	ψ^{16}	ψ^{15}	ψ^{14}	ψ^{13}	ψ^{12}	ψ^{11}	ψ^{12}	ψ^{13}	ψ^{14}	ψ^{15}	ψ^{16}	ψ^{17}	ψ^{18}

Abbildung 3: Die Färbung unseres Schachbrett mit Potenzen von ψ.