Differentialgleichungen I

$x'(t) = \underline{x(t)}$, $(x(0)=1)$

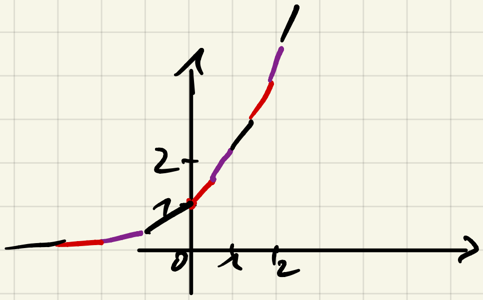
$x'(t) = 2x(t)^2 + 1$

$x'(t) = |2 - x(t)|$

$x'(t) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{x(t+\varepsilon) - x(t)}{\varepsilon} \approx \frac{x(t+\varepsilon) - x(t)}{\varepsilon}$ für ε hinreichend klein

$\boxed{\frac{x(t+\varepsilon) - x(t)}{\varepsilon} \approx x'(t) = x(t)}$

$\Leftrightarrow \quad x(t+\varepsilon) = (\varepsilon + 1)\, x(t)$



$x(0) = 1$

$x(\tfrac{1}{2}) = \frac{3}{2}$

$x(1) = \frac{9}{4}$

$x(-\tfrac{1}{2}) = (-\tfrac{1}{2} + 1) \cdot 1$
$= \frac{1}{2}$

Eulerverfahren

Übung $\quad x'(t) = 2 - x(t)$, Zeichne die Funktionen ausgehend von folgenden Startwerten

(i) $x(0) = 0$
(ii) $x(0) = 1$
(iii) $x(0) = 2$
(iv) $x(0) = 3$

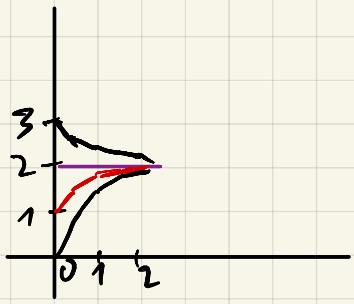
$x(t+1) = \underbrace{2}_{=2} + \underbrace{(1-1)}_{=0} x(t)$

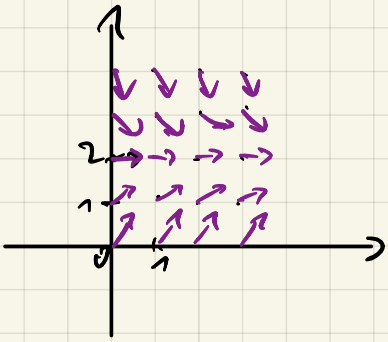
$\frac{x(t+\varepsilon) - x(t)}{\varepsilon} = 2 - x(t)$

$\Leftrightarrow \quad x(t+\varepsilon) = 2\varepsilon + (1-\varepsilon)\, x(t)$

Sei $\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow x(t + \tfrac{1}{2}) = 1 + \tfrac{1}{2} x(t)$

$x(0)$	$x(\frac{1}{2})$	$x(1)$	$x(\frac{3}{2})$	$x(2)$
0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{15}{8}$
1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{31}{16}$
2	2	2	2	2
3	$\frac{5}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{17}{8}$	$\frac{33}{16}$





Eine Differentialgleichung (ODE) n-ter Ordnung hat die Form

$$F(t, x(t), x'(t), \dots, \underbrace{x^{(n)}}_{\text{n-te Ableitung}}(t)) = 0.$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1+t \end{pmatrix} \qquad x'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

z.B. $F(t, x, x') = x' + x - 2 = 0$

$\iff x' = 2 - x$

Wir können ODE höherer Ordnung auf ODEs 1-ter Ordnung zurückführen:

Wir führen $u, v, w, \dots$, welche $x', x'', x''', \dots$ repräsentieren. Dann erhalten wir (hier für 4. Ordnung)

$$F(t, x(t), u(t), v(t), w(t), w'(t)) = 0$$

$$x'(t) - u(t) = 0$$

$$u'(t) - v(t) = 0$$

$$v'(t) - w(t) = 0$$

$$\rightsquigarrow \quad \tilde{F}\left(t, \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'(t) \\ u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix}\right) = 0$$

<u>Übung</u> Schreibe $x''(t) = -x(t)$ als ODE 1. Ordnung

Lösung: $u'(t) = -x(t)$

$x'(t) = u(t)$

Wir betrachten also im Folgenden nur ODEs 1. Ordnung.

lineare ODEs

$$x'(t) = \lambda(t)\,x(t) + \underbrace{g(t)}_{\text{inhomogener Teil}}$$

nicht-lineare ODEs

homogene lineare ODEs

$$x'(t) = \lambda(t)\,x(t)$$

inhomogene lineare ODEs

homogene lineare ODEs

$$x'(t) = x(t)$$

Eine Lösung ist $x_1(t) = e^t$. Wie erhalten wir daraus alle Lösungen?

Wir definieren $g(t) := \frac{x(t)}{e^t}$. Dann gilt

$$g'(t) = \frac{x'(t)e^t - x(t)e^t}{e^{2t}} = \frac{x(t)e^t - x(t)e^t}{e^{2t}} = 0.$$

Also ist $g(t)$ konstant. Also ist die allgemeine Lösung

$$x(t) = c\,e^t.$$

Starten wir mit $x'(t) = \lambda\,x(t)$. Dann ist die allgemeine Lösung

$$x(t) = c\,e^{\lambda t}.$$

Jetzt bleibt noch der allgemeine Fall

$$x'(t) = \lambda(t)\,x(t).$$

↳ nächste Woche