Funktionalgleichungen II

Nachdem wir letzte Woche die Cauchyschen Funktionalgleichungen betrachtet haben, wollen wir diese Woche zu komplizierteren Beispielen kommen. Wir starten mit Aufgabe 4 aus der letzten Woche

Beispiel 1 Wir suchen alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche

$$2f(x) = f(x+y) + f(x+2y) \tag{1}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \geq 0$ erfüllen.

Wir wissen bereits, dass das Ziel ist, durch cleveres Einsetzen verschiedener x und y Eigenschaften von f herauszufinden. Dafür bieten sich oft Standardsubstitutionen wir $x \coloneqq 0$, $y \coloneqq 0$, $x \coloneqq -x$, $y \coloneqq -y$, $x \coloneqq y$ oder $x \coloneqq -y$ an. Bei unserem Beispiel führt $y \coloneqq 0$ jedoch nur zur trivialen Aussage $2f(x) = f(x) + f(x)$ und liefert uns keine weiteren Informationen. Die anderen Standardsubstitutionen haben das Problem, dass wir für (1) die Bedingung $y \geq 0$ haben – eine etwas ungewöhnliche Einschränkung, die uns jedoch dazu zwingt nach anderen Substitutionen zu suchen.

Wie geht man jetzt also an diese Aufgabe ran? Das Ziel ist es, x und/oder y so zu ersetzen, dass möglichst viele Terme aus (1) in der neuen Gleichung wieder auftauchen, da wir ja nach möglichst einfachen Funktionalgleichungen suchen, aus denen wir dann Eigenschaften von f ableiten können. In (1) kommen $f(x), f(x+y)$ und $f(x+2y)$ vor. Setzen wir nun $y \coloneqq 2y$, so erhalten wir

$$2f(x) = f(x+2y) + f(x+4y),\ x \in \mathbb{R}, y \geq 0 \tag{2}$$

Wir müssen dabei natürlich auf die Einschränkung von y auf $[0,\infty)$ achten, aber da $y \in [0,\infty) \Leftrightarrow 2y \in [0,\infty)$, entstehen an dieser Stelle keine weiteren Probleme. Vergleichen wir nun (1) und (2), so stellen wir fest, dass sich daraus die Aussage

$$f(x+y) = f(x+4y),\ x \in \mathbb{R}, y \geq 0$$

ableiten lässt. Schreiben wir die Gleichung noch etwas schöner mit $x \coloneqq x+y$ und $y \coloneqq 3y$, so erhalten wir

$$f(x) = f(x+y),\ x \in \mathbb{R}, y \geq 0$$

Daraus können wir nun direkt ablesen, dass f eine konstante Funktion sein muss. Als letztes bleibt noch zu überprüfen, ob jede Funktion $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung ist, indem wir eine Probe machen: $2f(x) = 2c = f(x+y) + f(x+2y)$. Damit sind genau die Funktionen der Form $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ die Lösungen von (1).

Als nächstes wollen wir uns eine weitere Funktionalgleichung angucken.

Beispiel 2 Wir suchen alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche

$$f(x+y)^2 = f(x)^2 + f(y)^2$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllen.

Wieder probieren wir die Standardsubstitutionen zuerst aus. So gibt uns $x \coloneqq y \coloneqq 0$, dass $f(0)^2 = f(0)^2 + f(0)^2$ und damit $f(0) = 0$. Als nächstes probieren wir $x \coloneqq -y$ und erhalten $f(0)^2 = f(x)^2 + f(-x)^2$. Zusammen mit $f(0) = 0$ folgt

$$f(x)^2 + f(-x)^2 = 0, \; x \in \mathbb{R}$$

Nutzen wir nun jedoch, dass $f(x)^2, f(-x)^2 \geq 0$, so können wir daraus ableiten, dass $f(x)^2 = f(-x)^2 = 0$ und damit $f(x) = f(-x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist. Zum Schluss überprüfen wir wieder, ob $f(x) = 0$ wirklich eine Lösung ist: $f(x+y)^2 = 0 = f(x)^2 + f(y)^2$.

Nun ein paar Aufgaben zum Üben

Aufgabe 1 Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, die

$$xf(y) - yf(x) = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ erfüllen.

Aufgabe 2 (schwer) Gesucht sind alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass

$$xf(x+xy) = xf(x) + f(x^2)y$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.

Tipp: Versuche zuerst $f(y+1) = 1 + f(y)$ und $f(x^2) = xf(x)$ zu zeigen, da man dann durch die Substitution $x \coloneqq a \neq 0$ und $y \coloneqq b - 1$ auf

$$\begin{aligned} af(ab) &= af(a + a(b-1)) = af(a) + f(a)^2 f(b-1) \\ &= af(a) + af(a)f(b) - af(a) = af(a)f(b) \end{aligned}$$

und damit auf $f(ab) = f(a)f(b)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ kommt. Leite daraus dann f ab.

Aufgabe 3 Wir suchen alle stetigen Funktionen $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, welche

$$f(x) + f(y) + 2xyf(xy) = \frac{f(xy)}{f(x+y)}$$

für alle $x, y > 0$ erfüllen.

Tipp: Da wir nur stetige Funktionen suchen, versuche $f(x)$ erst für $x \in \mathbb{N}^*$, dann für $x = \frac{1}{p}$, $p \in \mathbb{N}^*$ und dann für $x \in \mathbb{Q}_+$ zu bestimmen, da wir durch die Stetigkeit dann auch $f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}_+$ kennen.