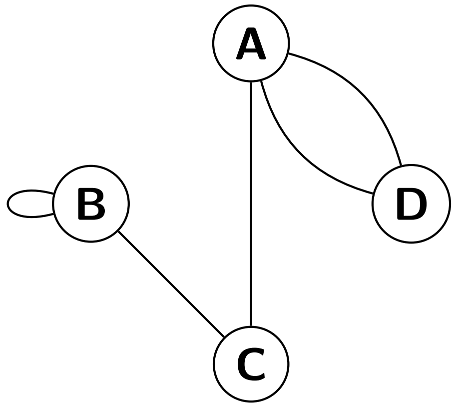
Graphentheorie I

Ein Graph ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei V die *Menge der Knoten* und $E \subseteq V \times V$ die *Menge der Kanten* ist. Wir sagen, dass zwei Knoten $u, v \in V$ *verbunden* sind, wenn $(u, v) \in E$.

Beispiel Graph $G = (V, E)$ mit den Knoten $V = \{A, B, C, D\}$ und den Kanten $E = \{(A, C), (B, B), (B, C), (A, D), (A, D)\}$



Ein Graph kann also auch *parallele Kanten*, d.h. doppelte Kanten, oder *Schleifen*, d.h. Kanten mit denselben Start- und Endpunkt, haben. Enthält ein Graph weder parallele Kanten oder Schleifen, so nennen wir ihn *schlicht*.

Für jeden Knoten $u \in V$ können wir den *Knotengrad* $\deg(u)$ definieren. Dieser beschreibt die Anzahl der angrenzenden Kanten, wobei eine Schleife doppelt zählt. In unserem Beispiel gilt also

u	A	B	C	D
$\deg(u)$	3	3	2	2

Aufgabe 1 Zeichne einen Graphen mit 4 Knoten mit den folgenden Knotengraden

(a) $\deg(A) = 2,\ \deg(B) = 3,\ \deg(C) = 2,\ \deg(D) = 1$

(b) $\deg(A) = 5,\ \deg(B) = 1,\ \deg(C) = 4,\ \deg(D) = 1$

Aufgabe 2 Zeige, dass die Summe der Grade aller Knoten eines Graphen immer gerade ist.

Aufgabe 3 Zeige, dass es in einem schlichten Graphen mindestens zwei Knoten mit gleichem Grad gibt. Finde zudem einen nicht-schlichten Graphen, für den dies nicht gilt.

Nächste Woche wollen wir dann zur Färbungen von Graphen kommen und dazu soll folgende Aufgabe vorbereiten.

Aufgabe 4 35 Mädchen und Jungen sitzen an einem runden Tisch. Zeige, dass es eine Person gibt, die zwei Mädchen als Nachbarn hat.

Tipp: Modelliere jede Person als einen Knoten, wobei wir Mädchen rot und Jungen blau färben. Verbinde zwei Personen durch eine Kante, wenn sich genau eine Person zwischen ihnen befindet. Der Graph zerfällt dann in zwei Komponenten. Was kannst du über diese aussagen?