Teleskopsummen und Konjugierte Terme

Nachdem wir uns letzte Woche Teleskopsummen angeguckt haben, wollen wir dieses Mal noch ein paar abschließende Aufgaben dazu machen und dann zum verwandten Thema der konjugierten Terme übergehen.

Zur Erinnerung: Bei einer Teleskopsumme haben sich aufeinanderfolgende Terme in einer Weise "weggehoben", also in allgemeiner Form

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_{n+1}-a_1$$

Der Standardtrick, um eine Summe in diese Form zu bringen, war

$$\frac{b-a}{ab}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}.$$

in passender Form anzuwenden.

Jetzt wollen wir dieses Wissen jedoch auf kompliziertere Aufgaben anwenden. Dazu betrachten wir zuerst folgende Aufgabe

Zeige, dass folgende Ungleichung gilt

$$\frac{1}{1\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{1}}+\ldots+\frac{1}{2019\cdot\sqrt{2020}+2020\cdot\sqrt{2019}}<1$$

Wir stellen fest, dass der Nenner leider keine Produktform hat, wodurch unser Standardtrick noch nicht anwendbar ist. Unser erstes Ziel soll also sein, den Nenner zu vereinfachen. Wir wollen also die Wurzeln eliminieren. Dazu nutzen wir $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, d.h. wir erweitern den Bruch entsprechend.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{1}}+\ldots+\frac{1}{2019\cdot\sqrt{2020}+2020\cdot\sqrt{2019}}\\
&=\sum_{k=1}^{2019}\frac{1}{k\cdot\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{2019}\frac{(k+1)\cdot\sqrt{k}-k\cdot\sqrt{k+1}}{(k\cdot\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k})((k+1)\cdot\sqrt{k}-k\cdot\sqrt{k+1})}\\
&=\sum_{k=1}^{2019}\frac{(k+1)\cdot\sqrt{k}-k\cdot\sqrt{k+1}}{(k+1)^2k-k^2(k+1)}=\sum_{k=1}^{2019}\frac{(k+1)\cdot\sqrt{k}-k\cdot\sqrt{k+1}}{k^3+2k^2+k-k^3-k^2}\\
&=\sum_{k=1}^{2019}\frac{(k+1)\cdot\sqrt{k}-k\cdot\sqrt{k+1}}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{2019}\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)
\end{aligned}$$

Wir erhalten nach vereinfachen also eine Teleskopsumme und können damit die Summe direkt berechnen

$$=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2020}}=1-\frac{1}{\sqrt{2020}}<1$$

Das Thema der Teleskopsummen soll mit der folgenden Aufgabe abgeschlossen werden.

Aufgabe 1 Zeige, dass für alle $n \geq 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}} < \sqrt{2n}$$

Tipp: Zeige zuerst, dass $2\sqrt{k} \geq \sqrt{k-1} + \sqrt{k+1}$ *und schätze dann damit den Nenner ab.*

Wir kommen nun zum nächsten Thema: "Konjugierte Terme". Auch hier ist die Idee, dass sich Terme wegkürzen. Um das Prinzip einzuführen, betrachten wir folgende Aufgabe

Was ist die 100-te Nachkommastelle der Zahl $(\sqrt{50} + 7)^{100}$*?*

Der Trick bei dieser Aufgabe ist es, den konjugierten Term $(\sqrt{50} - 7)^{100}$ zu betrachten, da sich folgende nützliche Eigenschaft beweisen lässt:

Aufgabe 2 Zeige, dass $(\sqrt{50} + 7)^{100} + (\sqrt{50} - 7)^{100}$ eine natürliche Zahl ist.

Tipp: Benutze den binomischen Lehrsatz.

Jetzt stellen wir noch fest, dass $\sqrt{50} - 7 < 0,1$, da $7,1 = 50,41 > 50$. Daraus folgt nun, dass $(\sqrt{50} - 7)^{100} < 0,1^{100}$. Nutzen wir nun, dass $(\sqrt{50} + 7)^{100} + (\sqrt{50} - 7)^{100}$ eine natürliche Zahl ist, können wir daraus folgern, dass die ersten 100 Nachkommastellen von $(\sqrt{50} + 7)^{100}$ alles Neunen sein müssen.

Auch für die folgende Aufgabe ist der Trick, den konjugierten Term zu betrachten.

Aufgabe 3 (schwer) Zeige, dass für es für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$(\sqrt{2} - 1)^n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

Tipp: Schreibe zuerst $(\sqrt{2} - 1)^n$ *und* $(\sqrt{2} + 1)^n$ *mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes aus und gruppiere alle Terme mit* $\sqrt{2}$ *(nennen wir diese* A*) und alles ohne* $\sqrt{2}$ *(nennen wir diese* B*). Stelle als nächstes diese Terme mit Hilfe von* $(\sqrt{2} - 1)^n$ *und* $(\sqrt{2} + 1)^n$ *dar und argumentiere, dass* $A^2 + 1 = B^2$ *gilt.*