Graphentheorie II

Letzte Woche haben wir Graphen eingeführt. Von besonderem Interesse sind für uns dabei die einfachen Graphen, welche also keine Schleifen oder doppelte Kanten besitzen. Der Einfachheit halber seien alle Graphen im Folgenden immer einfach.

Erinnern wir uns an die Aufgabe 4 aus dem letzten Brief, so bemerken wir, dass der betrachtete Graph in zwei Komponenten zerfallen ist. Wir wollen diesen Umstand nun mathematisch beschreiben. Dazu benötigen wir folgende Definitionen:

Ein *Kantenzug* der Länge $n \geq 0$ ist eine Folge $U_0 e_0 U_1 e_1 \dots U_n$ von Knoten $U_i \in V$ und Kanten $e_i \in E$, so dass $e_i = \{U_i, U_{i+1}\}$. Man kann sich das also als eine Folge von aneinander angrenzenden Kanten vorstellen, wobei man Kanten auch mehrfach verwenden darf. Falls der Start- und Endknoten übereinstimmen, d.h. $U_0 = U_n$, so nennen wir den Kantenzug *geschlossen*.

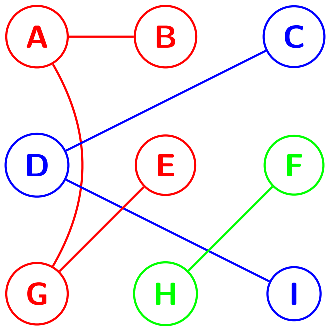
Wenn bei einem Kantenzug alle Knoten unterschiedlich sind, so heißt er auch *Weg*. Wenn Start- und Endknoten wieder übereinstimmen, so nennen wir ihn auch *Zyklus*.

Aufgabe 1 *Gegeben sei ein Graph (V, E) und zwei unterschiedliche Knoten $A, B \in V$. Zeige, dass dann jeder Kantenzug von A nach B auch einen Weg von A nach B enthält.*

Um zurück zu den Komponenten zu kommen, definieren wir was Zusammenhang ist. Ein Graph heißt *zusammenhängend*, wenn es für alle Paare von verschiedenen Knoten $A, B \in V$ einen Weg von A nach B gibt. Eine *Zusammenhangskomponente* eines Graphen ist eine maximale zusammenhängende Teilmenge. Maximal bedeutet in diesem Zusammenhang, dass man keinen weiteren Knoten hinzufügen kann, so dass die Menge trotzdem noch zusammenhängend bleibt.

Aufgabe 2 *Zeige, dass jeder Graph eine eindeutige Zerlegung in Zusammenhangskomponenten hat. Insbesondere ist jeder Knoten Teil einer Zusammenhangskomponente und je zwei Zusammenhangskomponenten sind disjunkt.*

Um die Zusammenhangskomponenten zu finden, kann man Färbungen nutzen: Man färbt einen Knoten mit einer Farbe, dann seine Nachbarn, deren Nachbarn usw. Alles was man dann gefärbt hat, gehört zu einer Zusammenhangskomponente. Bei den restlichen Knoten des Graphen wählt man wieder einfach einen Knoten aus und wiederholt die Prozedur mit einer anderen Farbe.



Spannender jedoch, als das Färben von benachbarten Knoten in der gleichen Farbe, ist das Färben von benachbarten Knoten in verschiedenen Farben. So definieren wir den Begriff der *k-Färbbarkeit*, welcher angibt, dass die Knoten des Graph mit k verschiedenen Farben so gefärbt werden können, dass keine zwei Nachbarn die gleiche Farbe haben.

Wir beschäftigen uns zuerst mit dem einfachen Fall der 2-Färbbarkeit. Es ist leicht zu sehen, dass in einem 2-färbbaren Graphen alle Zyklen eine gerade Länge haben, da sich entlang eines Zyklus die Farben immer abwechseln müssen. Interessant ist jedoch, dass wir auch die Umkehrung beweisen können.

Aufgabe 3 *Zeige, dass ein Graph genau dann 2-färbbar ist, wenn alle Zyklen gerade Länge haben.*

Tipp: Gib einen Algorithmus an, um den Graphen zu Färben und zeige dann, dass dieser immer funktionieren muss.

Wir wollen den Brief abschließen, indem wir uns ein besonders schöne Lösung des *Museumswächterproblems* angucken. Das Problem lautet wie folgt

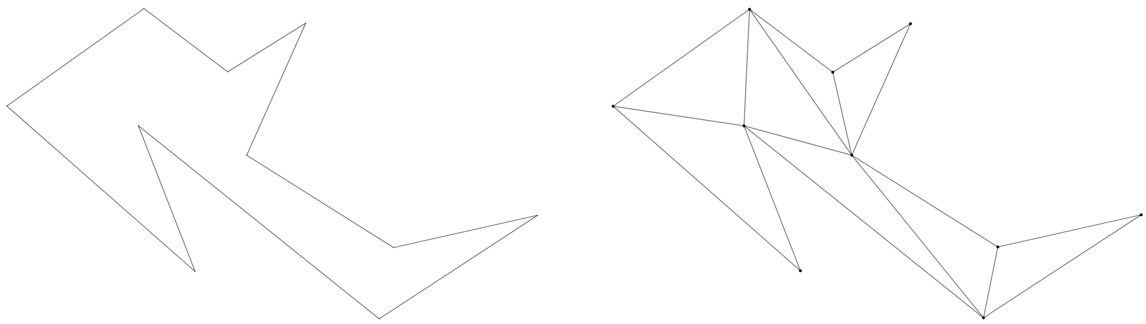
Museumswächterproblem *Gegeben sei ein Museum mit einem überschneidungsfreien n-Eck als Grundfläche. Dieses muss nicht konvex sein! Wir wollen nun m Wächter so platzieren, dass jeder Punkt des Museums von mindestens einem Aufseher überwacht wird. Wie viele Wächter sind dazu nötig?*

Es stellt sich raus, dass man bei einem n-Eck maximal $m = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Wächter braucht. Die folgende Aufgabe zeigt, dass diese Abschätzung auch scharf ist.

Aufgabe 4 *Finde für $n = 3k$ einen Museumsgrundriss, für den mindestens $\frac{n}{3} = k$ Wächter benötigt werden.*

Wir wollen die $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$-Grenze beweisen. Dazu triangulieren wir das n-Eck zuerst, indem wir die das Polygons durch $n - 3$ sich nicht kreuzende Diagonalen aufteilen, so dass n Dreiecke entstehen. Welche Triangulierung wir genau wählen, ist dabei egal. Der Beweis, dass eine solche immer existiert, wollen wir an dieser Stelle jedoch auslassen.

Wir interpretieren die Triangulierung im Folgenden als Graph. Der restliche Beweis lässt sich in zwei grobe Schritte aufteilen.



(a) Museumsgrundriss (b) mögliche Triangulierung

Aufgabe 5 *Zeige, dass der entstehende Graph 3-färbbar ist.*

Tipp: Führe eine vollständige Induktion über die Anzahl der Knoten.

Aufgabe 6 *Ausgehend von einer 3-Färbung eines solchen Graphen, warum zeigt dies, dass wir für diesen Grundriss maximal* $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ *Wächter benötigen?*