# Was ist hyperbolische Geometrie? (I)

Um diese Frage zu beantworten, sollten wir uns zunächst eine einfachere Frage stellen. Was ist eigentlich eine Geometrie? Bereits Euklid hat berühmterweise ein Buch voller Beweise geschrieben, wo er die Geometrie axiomatisierte. Das war zu seiner Zeit (ca. 300 v.Chr.) absolut bahnbrechend und revolutionär, alleine wenn man bedenkt, dass die axiomatische Herangehensweise an die Mathematik eine sehr junge Entwicklung ist. In diesem Skript gehen wir nach und nach die heutigen Axiome der euklidischen Geometrie durch und werden dadurch einsehen können, an welcher Stelle wir den Bogen zur hyperbolischen nehmen können.

## Was ist eine Geometrie?

Eine (ebene) Geometrie ist ein Quadrupel $(P, \mathcal{G}, d, \angle)$, wobei

- $P$ eine beliebige nichtleere Menge ist. Die Elemente von $P$ nennen wir *Punkte*.
- $\mathcal{G} \subseteq 2^P$ eine Menge von Teilmengen von $P$ ist. Hier bezeichnet $2^P$ die Potenzmenge, also die Menge aller Teilmengen von $P$. Die Elemente von $\mathcal{G}$ nennen wir *Geraden*.
- $d : P \times P \to \mathbb{R}$ ist eine Funktion. Wir nennen $d(A, B)$ den *Abstand* der beiden Punkte $A \in P$ und $B \in P$.
- $\angle : P \times P \times P \to [0, \pi]$ ist eine Funktion. Wir nennen $\angle ABC$ den *Winkel* $ABC$.

Eine Geometrie zu sein, ist an sich noch nichts besonderes. Erst wenn wir gewisse Forderungen an die Objekte stellen, bekommen wir interessante Eigenschaften.

## Das Inzidenzaxiom $\mathfrak{A}1$

Eine Geometrie $(P, \mathcal{G}, d, \angle)$ erfüllt das *Inzidenzaxiom*, wenn

(I1) jede Gerade mindestens zwei Punkte enthält,

(I2) es zu je zwei verschiedenen Punkten stets <u>genau eine</u> Gerade gibt, die durch diese beiden Punkte verläuft und

(I3) es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Gerade liegen.

Wir können das Axiom etwas formaler schreiben.

(I1) Für jede Gerade $g \in \mathcal{G}$ gibt es zwei verschiedene Punkte $A, B \in P$, sodass $A, B \in g$.

(I2) Für alle $A, B \in P$ mit $A \neq B$ gibt es genau eine Gerade $g \in \mathcal{G}$ mit $A, B \in g$. Wir schreiben $g = AB$.

(I3) Es gibt drei verschiedene Punkte $A, B, C \in P$, sodass es keine Gerade $g \in \mathcal{G}$ gibt, mit $A, B, C \in g$.

Liegen drei oder mehr Punkte auf einer Geraden, so nennen wir diese *kollinear*.

**Aufgabe 1** Verwende die Axiome, um folgende Aussagen über Geometrien zu beweisen, die das Inzidenzaxiom erfüllen.

a) Für zwei verschiedene Geraden $g, h \in \mathcal{G}$ gilt $g \cap h = \varnothing$ oder $g = h$ oder $g \cap h = \{S\}$ für ein $S \in P$. Falls so ein $S$ existiert, dann nennen wir ihn den *Schnittpunkt* von $g$ und $h$. Falls so ein Schnittpunkt nicht existiert, heißen $g$ und $h$ *parallel*.

b) Zu jedem Punkt $A \in P$ gibt es eine Gerade $g \in \mathcal{G}$ mit $A \notin g$.

Hier ist ein Beispiel, wie so ein Beweis aussehen könnte. Wir beweisen die Aussage, dass in einer *Inzidenzgeometrie* (eine Geometrie, die das Inzidenzaxiom erfüllt) immer mindestens drei Geraden existieren.

*Beweis.* Nach (I3) existieren drei Punkte $A, B, C$, die nicht kollinear sind. Nach (I2) existieren nun die Geraden $AB$, $AC$ und $BC$. Diese müssen voneinander verschieden sein, denn $C \notin AB$, $B \notin AC$ und $A \notin BC$.

**Aufgabe 2** Ob eine Geometrie eine Inzidenzgeometrie ist, hängt nur von $P$ und $\mathcal{G}$ ab. Deshalb geben wir in dieser Aufgabe Geometrien nur als Paar $(P, \mathcal{G})$ an. Überprüfe, ob die folgenden Geometrien das Inzidenzaxiom erfüllen und wenn nicht, welches nicht erfüllt ist.

a) $\mathfrak{G} = (\{1, 2, 3\}, \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\})$

b) Die Punktmenge $P$ sei die Oberfläche eines Kreises und $\mathcal{G}$ die Menge der *Großkreise*. Das sind genau die Schnittmengen der Oberfläche mit einer Ebene, die durch den Mittelpunkt geht.

**Aufgabe 3** Finde drei Geometrien, die jeweils genau eines der drei Aussagen des Inzidenzaxioms nicht erfüllen.

## Das Abstandsaxiom $\mathfrak{A}2$

Eine Geometrie $(P, \mathcal{G}, d, \angle)$ erfüllt das *Abstandsaxiom*, wenn

(A) Für jede Gerade $g$ gibt es eine bijektive Abbildung $\varphi : g \to \mathbb{R}$, sodass $d(A, B) = |\varphi(A) - \varphi(B)|$.

**Aufgabe 4** Sei $(P, \mathcal{G}, d, \angle)$ eine Geometrie, die $\mathfrak{A}2$ erfüllt. Beweise folgende Aussagen.

a) Für jede Gerade $g = AB$ gibt es eine bijektive Abbildung $\varphi_{AB} : g \to \mathbb{R}$ mit $\varphi_{AB}(A) = 0$ und $\varphi_{AB}(B) = 1$. Wir nennen $\varphi$ ein *Koordinatensystem*.

b) $(P, d)$ bildet einen metrischen Raum. Das bedeutet es gilt

- $d(A, B) \geq 0$ und $d(A, B) = 0$ genau dann, wenn $A = B$,
- $d(A, B) = d(B, A)$ und

– $d(A,B) + d(B,C) \geq d(A,C)$

für alle $A, B, C \in P$.

c) Wenn $A, B, C \in g$ für eine Gerade $g \in \mathcal{G}$, dann gilt genau eine der drei Fälle:

   – $d(A,B) + d(B,C) = d(A,C)$
     In diesem Fall schreiben wir $A - B - C$, was aussagt, dass $B$ zwischen $A$ und $C$ liegt.

   – $d(A,C) + d(C,B) = d(A,B)$
     In diesem Fall schreiben wir $A - C - B$, was aussagt, dass $C$ zwischen $A$ und $B$ liegt.

   – $d(B,A) + d(A,C) = d(B,C)$
     In diesem Fall schreiben wir $B - A - C$, was aussagt, dass $A$ zwischen $B$ und $C$ liegt.

**Aufgabe 5** Da die Winkelfunktion bisher noch nicht relevant ist, geben wir Geometrien in dieser Aufgabe als Tripel $(P, \mathcal{G}, d)$ an. Gebe jeweils eine (nichttriviale) Geometrie an, die

a) $\mathfrak{A}1$ aber nicht $\mathfrak{A}2$ erfüllt,

b) $\mathfrak{A}2$ aber nicht $\mathfrak{A}1$ erfüllt,

c) sowohl $\mathfrak{A}1$ als auch $\mathfrak{A}2$ erfüllt.