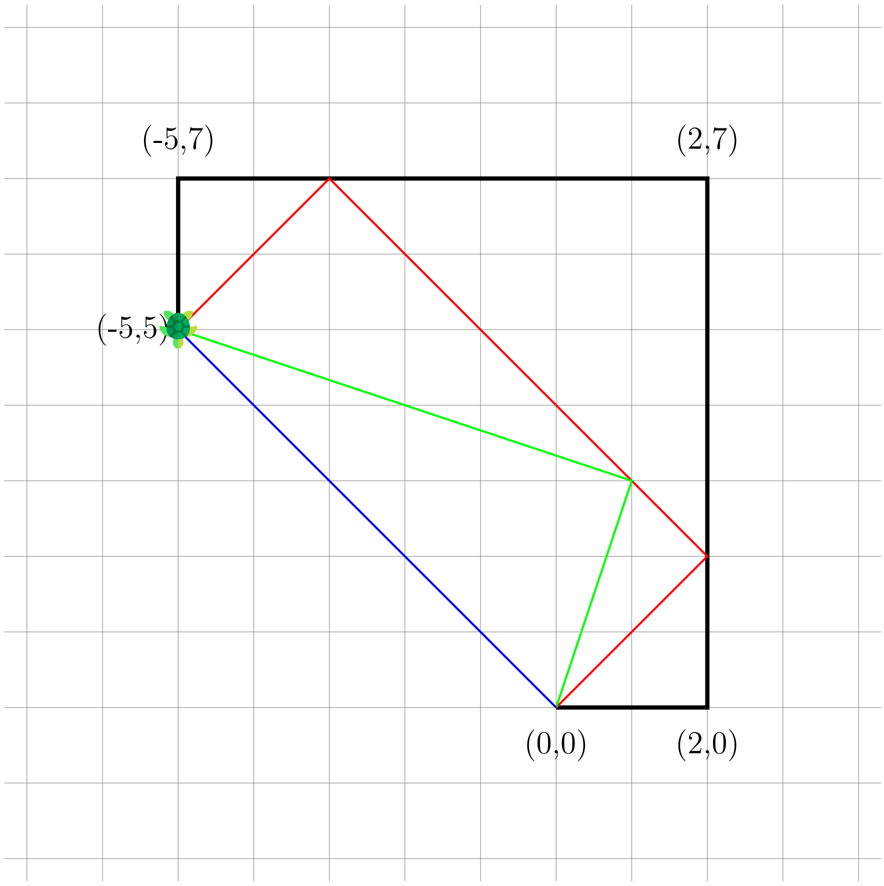

Abbildung 1: Iterierte Methode. Der Anstieg des roten Lasers korrespondiert mit einer Nullstelle des Polynom. Interpretiert man nun dessen Pfad als Schildkrötenweg und schießt wieder einen (diesmal grünen) Laser auf die Schildkröte, dann ist der Anstieg des grünen Lasers wieder eine Nullstelle, wobei Anstieg hier in Relation zum roten Laser gesehen werden muss. Der rote Laser hat einen Anstieg von 1, der grüne von 1/2 und der blaue von 2. Damit sind die Nullstellen -1/2, -1 und -2.

1 Laser und Schildkröten (II)

Wir haben beim letzten Mal kennengelernt, wie sich die Schildkröten-Laser-Methode anwenden lässt, um Nullstellen zu finden. Jedoch kann es passieren, dass einige Nullstellen dennoch schwer zu finden sind, beispielweise bei dem Polynom $p_2(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$. Zeichnen wir hierfür den Pfad, dann sehen wir eine Nullstelle relativ schnell mithilfe der Methode, nämlich $x_1 = 2$. Doch wie geht es weiter?

Nun es stellt sich heraus, dass wir die Methode *iterativ* anwenden können. Um dies hier zu motivieren, löse folgende Aufgaben.

Aufgabe 1 Führe eine Polynomdivision durch für $(x^3 - 3x^2 + x + 2) \div (x - 2)$. Zeichne anschließend den Schildkrötenweg für das resultierende Polynom. Vergleich den Weg mit dem Pfad des roten Lasers in Abbildung 2. Was fällt dir auf?

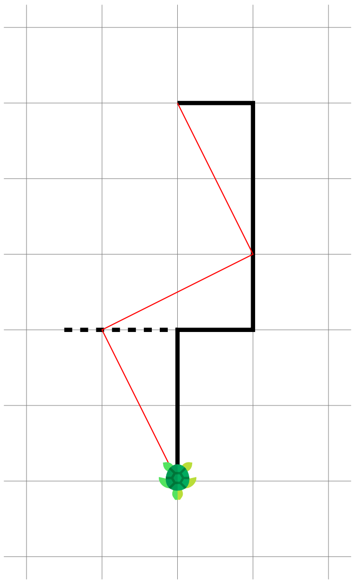

Abbildung 2: Die Schildkröten-Laser-Methode für das Polynom $x^3 - 3x^2 + x + 2$.

Aufgabe 2 Bestimmte die Nullstellen des Polynom $x^2 - x - 1$ mithilfe der Schildkröten-Laser-Methode. Die Nullstellen sind irrational, die Aufgabe ist es, dennoch den exakten Pfad der zwei Laser einzuzeichnen. Dafür gab es im letzten Blatt eine passende Aufgabe.

Der Pfad des Lasers scheint ähnlich zum Pfad des reduzierten Polynoms aus Aufgabe 1 zu sein. Tatsächlich gibt uns der Anstieg des Lasers die Nullstelle und der Pfad des Lasers ergibt bis auf Multiplikation mit einem Faktor das Ergebnis der Polynomdivision. Formaler gesagt: Ist $p(x)$ unser Polynom und x^* eine Nullstelle, dann ist das Polynom $p(x) \div (x - x^*)$ proportional zum Polynom, welches dem Laserpfad entspricht. Das bedeutet widerum, dass die Nullstellen des Polynoms zugehörig zum Laserpfad, ebenso Nullstellen des ursprünglichen Polynoms $p(x)$ sind. Wir müssten also kein Extrabild anfertigen, um die weiteren Nullstellen zu finden, sobald ein Laserpfad gefunden wurde, kann dieser einfach als neue Ausgangsstelle genommen werden. Auf einem Blatt Papier hat man noch den Vorteil, dass dieses so gedreht werden kann, dass der erste Teil des Pfades nach rechts zeigt, so wie wir bisher die Schildkrötenwege gezeichnet haben. Diese Methode nennen wir dann die *iterierte Schildkröten-Laser-Methode.*

Aufgabe 3 Finde alle Nullstellen der folgenden Polynome.

- $p_1(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
- $p_2(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$
- $p_3(x) = x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 29x + 30$
- $p_4(x) = 9x^2 + 6x + 1$

Aber Moment, wieso ist das so? Erinnere dich an den Beweis zurück, warum die Schildkröten-Laser-Methode funktioniert. Dies können wir nun nutzen, um die neue Technik zu beweisen.

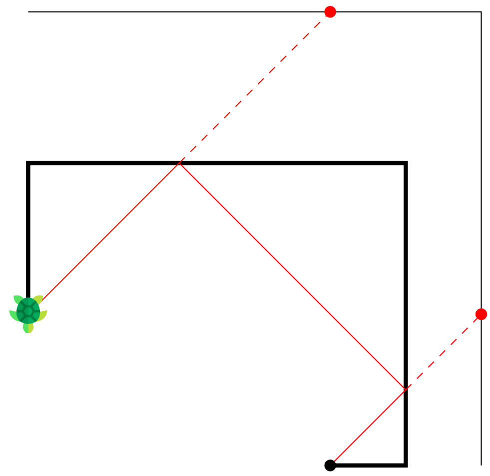

Abbildung 3: Ermittlung eines Laserpfades mithilfe von Origami. Man zeichne die Hilflinien ein und falte so, dass Anfangs- und Endpunkt gleichzeitig auf diesen landen, um einen Lösungspfad zu finden.

Aufgabe 4 Zeige, dass wenn x^* eine Nullstelle von $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ist, dass dann $p(x) \div (x - x^*) = a'x^2 + b'x + c'$ ist mit

$$a' = a, \qquad b' = b + ax^*, \qquad c' = c + x^*(b + ax^*)$$

Wo finden sich die Koeffizienten a', b' und c' in der Schildkröten-Laser-Methode wieder? Beweise, dass es eine Zahl $r \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $r \cdot (a'x^2 + b'x + c')$ das Polynom zugehörig zum Laserpfad ist.

Als letztes werden wir demonstrieren, wie wir Origami verwenden können, um mit dieser Methode kubische Polynome zu lösen. Betrachte ein Polynom $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ wie in Abbildung 3.

Zeichne zwei Hilfslinien parallel zur zweiten und dritten Strecke des Schildkrötenweges (gegenüber des Anfangs- oder Endpunktes). Der Abstand dieser Hilfsgeraden zur jeweiligen Strecke sei die Länge des ersten bzw. vierten Segments. Bei einem gegebenen Laserpfad passiert es nun, dass durch Faltung des Blattes entlang des mittleren Lasersegments, die Schildkröte und der Startpunkt auf den Hilfslinien landen. Falten wir umgekehrt – also wenn der Laserpfad noch gesucht ist – das Blatt so, dass die Schildkröte und der Startpunkt beide auf den Hilfslinien landen, dann korrespondiert die *Knickgerade* zum mittleren Segment eines lösenden Laserpfades. Der restliche Pfad ergibt sich dann automatisch. Deine letzte Aufgabe ist es, diesen Origami-Trick einmal praktisch anzuwenden.

Aufgabe 5 Löse die Gleichung $p(x) = 5x^3 + 6x^2 + 2.2x + 0.24 = 0$, indem du eine Nullstelle mithilfe der Origamimethode ermittelst und die restlichen beiden durch die Thales-Kreis-Methode aus dem letzten Übungsblatt.