Funktionalgleichungen III

In diesem Brief wollen wir das Thema der Funktionalgleichungen abschließen. Wir starten mit Aufgabe 3 aus dem letzten Brief. Wir suchen also alle *stetigen* Funktionen $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, welche

$$f(x) + f(y) + 2xyf(xy) = \frac{f(xy)}{f(x+y)} \tag{1}$$

für alle $x, y > 0$ erfüllen.

Am Anfang ist es sinnvoll zu versuchen, spezielle Funktionswerte auszurechnen und damit ein Gefühl für die mögliche Form der Lösung zu bekommen. Wir starten damit, in (1) $x \coloneqq y \coloneqq 1$ einzusetzen und erhalten

$$f(1) + f(1) + 2f(1) = \frac{f(1)}{f(2)} \quad \Leftrightarrow \quad f(2) = \frac{1}{4} \tag{2}$$

Setzen wir hingegen $x \coloneqq y \coloneqq 2$ in (1), so erhalten wir

$$f(2) + f(2) + 8f(4) = \frac{f(4)}{f(4)} \quad \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \quad f(4) = \frac{1}{16} \tag{3}$$

Es scheint also, als wäre $f(x) = \frac{1}{x^2}$, doch wie könnte man dies beweisen? In der Aufgabe ist spezifisch von *stetigen* Funktionen die Rede. Daher bietet sich also der Ansatz an, zuerst $f(x) = \frac{1}{x^2}$ für alle natürlichen Zahlen, dann für alle rationalen Zahlen und am Ende, durch Ausnutzen der Stetigkeit, den Zusammenhang für alle reellen Zahlen zu beweisen.

Das häufig gewählte Mittel, um eine solche Gleichung für alle natürlichen Zahlen zu beweisen, ist die vollständige Induktion. Wir brauchen also sowohl den Startwert $f(1)$ als auch einen Weg von $f(n)$ auf $f(n+1)$ zu schließen. Wir wollen nun zuerst $f(1)$ bestimmen. Dazu setzen wir in (1) $x \coloneqq 1$ und $y \coloneqq 2$ und erhalten

$$f(1) + f(2) + 4f(2) = \frac{f(2)}{f(3)} \quad \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \quad 4f(1) + 5 = \frac{1}{f(3)} \tag{4}$$

Setzen wir hingegen $x \coloneqq 1$, $y \coloneqq 3$ in (1), so erhalten wir

$$f(1) + f(3) + 6f(3) = \frac{f(3)}{f(4)} \quad \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \quad f(1) = 9f(3) \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt nun $4f(1)+5 = \frac{9}{f(1)}$ bzw. $4f(1)^2+5f(1) = 9$. Es gibt also die beiden Lösungen $f(1) = -\frac{9}{4}$ und $f(1) = 1$. Da jedoch nach Aufgabenstellen f nur positive Werte annimmt, folgt also $f(1) = 1$ und mit (5) auch $f(3) = \frac{1}{9}$. Damit haben wir also unseren Induktionsanfang.

Als nächstes benötigen wir jedoch noch eine Möglichkeit von $f(n)$ auf $f(n+1)$ zu schließen. Dazu setzen wir $y \coloneqq 1$ in (1) und erhalten

$$f(x) + f(1) + 2xf(x) = \frac{f(x)}{f(x+1)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{f(x+1)} = \frac{1}{f(x)} + 2x + 1 \tag{6}$$

Wenn wir also induktiv annehmen, dass $f(n) = \frac{1}{n^2}$, so folgt $f(n+1) = \frac{1}{n^2+2n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$, was unsere Aussage für alle $n \in \mathbb{N}^*$ beweist.

Der nächste Schritt ist es nun $f(x) = \frac{1}{x^2}$ für alle rationalen Zahlen zu beweisen. Dazu stellen wir zuerst fest, dass aus (6) sogar folgende stärkere Aussage folgt

$$\frac{1}{f(x+n)} = \frac{1}{f(x)} + \sum_{i=0}^{n-1}(2(x+i)+1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{f(x+n)} = \frac{1}{f(x)} + n(2x+n) \tag{7}$$

Sei nun $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+$ eine rationale Zahl, d.h. $p, q \in \mathbb{N}^*$. Dann können wir in (1) $x := q$ und $y := \frac{p}{q}$ einsetzen und erhalten

$$f(q) + f\left(\frac{p}{q}\right) + \frac{2}{p}f(1) = \frac{f(p)}{f\left(q + \frac{p}{q}\right)}$$

Nutzen wir nun (7) und zusätzlich, dass wir wegen $p \in \mathbb{N}^*$ bereits wissen, dass $f(p) = \frac{1}{p^2}$ gilt, so folgt

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow f(q) + f\left(\frac{p}{q}\right) + \frac{2}{p} &= \frac{1}{p^2}\left(\frac{1}{f\left(\frac{p}{q}\right)} + q\left(2 \cdot \frac{p}{q} + q\right)\right) \\ \Leftrightarrow f\left(\frac{p}{q}\right) - \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{f\left(\frac{p}{q}\right)} &= \frac{q^2}{p^2} - \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{\frac{q^2}{p^2}} \end{aligned}$$

Daraus folgt dann $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{q^2}{p^2}$, wenn wir wieder nutzen, dass f nur positive Werte annimmt, wodurch der Beweis für die rationalen Zahlen abgeschlossen ist.

Sei $x \in \mathbb{R}_+$ nun eine reelle Zahl. Dann können wir immer eine Folge rationaler Zahlen $(r_n)_n \subseteq \mathbb{Q}_+$ finden, so dass $r_n \to x$. Da wir $f(r_n)$ jedoch schon kennen, folgt mit Stetigkeit

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} r_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{r_n^2} = \frac{1}{x^2}$$

Damit folgt, dass wenn f eine Lösung ist, sie die Form $f(x) = \frac{1}{x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}_+$ hat. Als letztes ist nur noch zu zeigen, dass dies auch wirklich eine Lösung unserer Funktionalgleichung (1) ist

$$f(x) + f(y) + 2xyf(xy) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + 2xy\frac{1}{x^2y^2} = \frac{x^2+2xy+y^2}{x^2y^2} = \frac{\frac{1}{x^2y^2}}{\frac{1}{(x+y)^2}} = \frac{f(xy)}{f(x+y)}$$

Folgende Aufgabe eignet sich gut, um dieses Lösungsprinzip nochmal zu üben

Aufgabe 1 Finde alle Funktionen $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, welche die Bedingung $f(1) = 2$ und die Identität

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$$

für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ erfüllen.

Aufgabe 2 (Zusatz) Zeige, dass alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(1) = 2$ und

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$, notwendigerweise stetig sind.
Tipp: Aus Aufgabe 1 wissen wir, wie f auf den rationalen Zahlen aussieht. Versuche daraus dann mit Hilfe der Funktionalgleichung die Funktion f auch für alle nicht-rationalen x zu bestimmen.

Als unser letztes Beispiel zu Funktionalgleichungen suchen wir alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche

$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2 \tag{8}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllen.

Zuerst stellen wir fest, dass $f(x) = x$ die Gleichung lösen würde. Aber wir versuchen vorher wieder möglichst viel über f herauszufinden, indem wir spezielle Werte einsetzen. So lieft $x \coloneqq 0$ in (8)

$$f(f(y)) = y + f(0)^2$$

Aus dieser Gleichung können wir sogar eine sehr starke Eigenschaft von f folgern: f ist bijektiv. Es gilt nämlich zum einen, dass für jedes $z \in \mathbb{R}$, $f(f(z - f(0)^2)) = z$, d.h. z wird an der Stelle $f(z - f(0)^2)$ angenommen und zum anderen, dass für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = f(y)$ auch $x + f(0)^2 = f(f(x)) = f(f(y)) = y + f(0)^2$ und damit $x = y$ gilt.

Als nächstes setzten wir $y \coloneqq 0$ in (8)

$$f(x^2 + f(0)) = f(x)^2 \tag{9}$$

Setzen wir nun $x \coloneqq -x$ in (9), so folgt auch $f(x^2 + f(0)) = f(-x)^2$ und damit

$$f(x)^2 = f(-x)^2$$

Da f jedoch injektiv ist, gilt $f(x) \neq f(-x)$ für $x \neq 0$. Also folgt $f(x) = -f(x)$, d.h. f ist ungerade. Gleichzeitig folgt aus der Bijektivität, dass es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ gibt. Da f ungerade ist, erhalten wir damit, dass $f(0) = 0$. Setzen wir dies nun in (2) ein, so vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$f(x^2) = f(x)^2$$

Insbesondere gilt für jedes $t > 0$, dass $f(t) = f(\sqrt{t}^2) = f(\sqrt{t})^2 > 0$ und gleichzeitig $f(-t) = -f(t) < 0$.

Wir wissen bereits, dass $f(x) = x$ eine Lösung der Gleichung (8) wäre und wollen nun zeigen, dass dies auch die einzige Lösung ist. Dazu betrachten wir $g(t) = t^2 - f(t^2)$ und stellen fest, dass $g(t) = 0$ für alle $t \geq 0$ äquivalent zu $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist. Für $t = 0$ gilt $f(0) = 0$ und daher auch $g(0) = 0$. Sei also $t > 0$. Jetzt nutzen wir (8) mit $x \coloneqq t$ und $y \coloneqq -t^2$ und erhalten

$$f(t^2 + f(-t^2)) = -t^2 + f(t)^2 \quad \Leftrightarrow \quad f(g(t)) = f(t^2 - f(t^2)) = -(t^2 - f(t^2)) = -g(t)$$

Erinnern wir uns jedoch, dass $f(x) > 0$ für $x > 0$ und $f(x) < 0$ für $x < 0$, so folgt daraus, dass $g(t) = 0$ für alle t. Also haben wir gezeigt, dass $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ die einzige Lösung ist.

Wieder gibt es eine ähnliche Aufgabe zum Üben

Aufgabe 3 Ermittle alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche

$$f(xf(x) + f(y)) = y + (f(x))^2$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllen.

Zum Abschluss noch eine Knobelaufgabe, welche nicht direkt etwas mit den hier vorgestellten Lösungsmethoden für Funktionalgleichungen zu tun hat.

Aufgabe 4 Finde eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass

$$f(f(n)) = n^2$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.