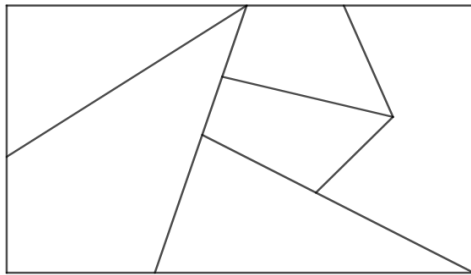


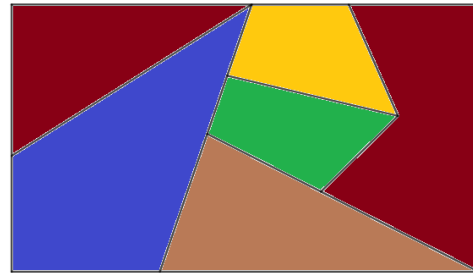
Graphentheorie III

In den nächsten beiden Brief wollen wir uns mit dem *5-Farbensatz* auseinandersetzen. Eine übliche Formulierung ist

Jede Landkarte kann mit 5 Farben so eingefärbt werden, dass keine zwei angrenzenden Länder die gleiche Farbe besitzen.



Landkarte



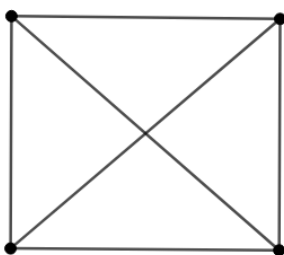
mögliche Färbung mit 5 Farben

Dieser Satz gilt sogar mit nur 4 Farben, aber der Beweis ist ungleich schwerer, weshalb wir uns an dieser Stelle mit der schwächeren Version begnügen. Unser erstes Ziel ist es, diesen Satz mathematisch zu formulieren. Dazu brauchen wir folgende Definition:

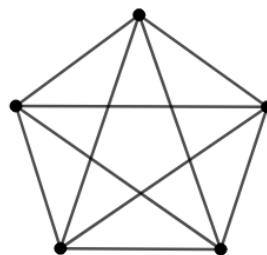
Ein Graph heißt *planar*, wenn er in der Ebene so gezeichnet (bzw. eingebettet) werden kann, wobei die Knoten durch Punkte und die Kanten durch Kurven zwischen diesen Punkten repräsentiert werden, dass keine Kanten sich schneiden. Interessanterweise gilt laut einem Satz von Wagner und Fray sogar, dass es man jeden planaren Graphen derart einbetten kann, dass jede Kante als gerade Strecke dargestellt wird.

Aufgabe 1 Sind folgende Graphen planar?

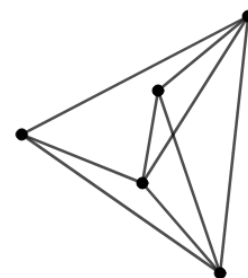
(a)



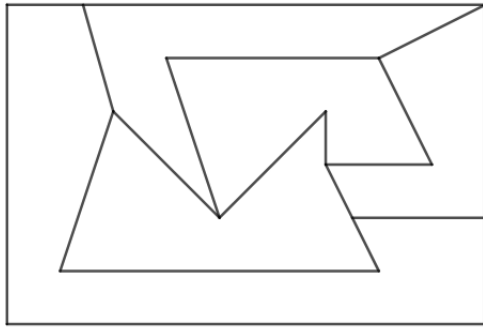
(b)



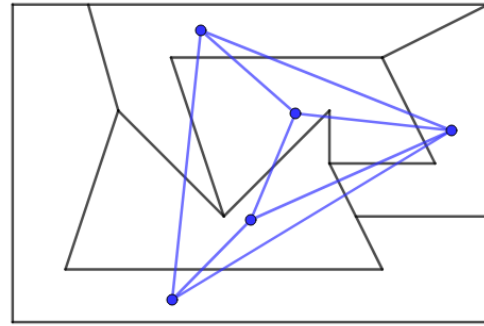
(c)



Wie hängen nun planare Graphen mit Landkarten zusammen? Wir stellen jede Landkarte als Graph dar, indem wir jedem Land einen Knoten zuordnen. Falls zwei Länder angrenzen, so verbinden wir die entsprechenden Knoten. Die Frage ist nun, ob dieser Graph notwendigerweise planar ist.



Landkarte



Konstruktion des entsprechenden Graphen

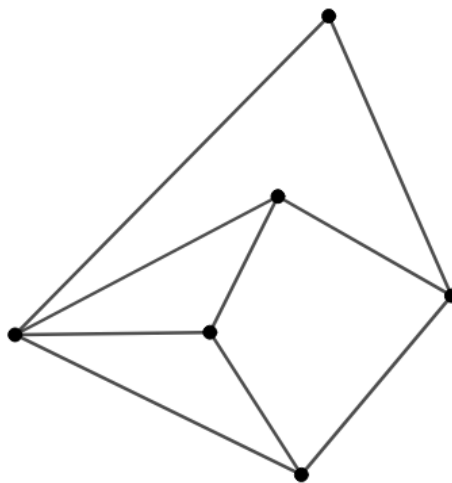
Aufgabe 2 Zeige, dass jeder Graph, der aus einer solchen Landkarte entsteht, planar ist.

Aufgabe 3 Beweise, dass andersherum für jeden gegebenen planaren Graphen auch eine entsprechende Landkarte existiert.

Da nun jedes Land durch genau einen Knoten modelliert wird, entspricht eine Färbung der Landkarte also einer Knotenfärbung des entsprechenden planaren Graphen. Das heißt, dass wir den 5-Farbensatz mathematisch also wie folgt formulieren können

Jeder planare Graph ist 5-färbbar.

Der Beweis dieses Satzes nutzt den *Eulerschen Polyedersatz für planare Graphen*. Dieser besagt, dass für zusammenhängende, planare Graphen $v - e + f = 2$ gilt, wobei v die Knotenzahl, e die Kantenanzahl und f die Anzahl der Flächen ist, die durch die Kanten aufgespannt wird. Dabei zählen das äußere Gebiet mit.



Graph mit $v - e + f = 6 - 9 + 5 = 2$

Aufgabe 4 *Beweise den Eulerschen Polyedersatz für planare Graphen durch strukturelle Induktion, d.h. indem du dir überlegst, was passiert, wenn du einen neuen verbundenen Knoten oder eine Kante zwischen zwei bestehenden Knoten hinzufügst.*

Wir wollen diesen Satz nun auf unseren Graphen anwenden, welcher aus der Landkarte entstanden ist. Es gilt also auch hier $v - e + f = 2$. Bemerken wir zusätzlich, dass jedes Gebiet durch mindestens 3 Kanten begrenzt werden, wobei jede Kante an maximal zwei Kanten angrenzt, so erhalten wir $2e \geq 3f$ und damit $6 = 3v - 3e + 3f \leq 3v - e$, d.h. $e \leq 3v - 6$. Insbesondere folgt, dass es einen Knoten $U \in V$ geben muss, dessen Grad höchstens 5 ist, da wir sonst mindestens $3v$ Kanten bräuchten.

Aufgabe 5 *Nutze diesem Umstand um eine schwächere Version, den 6-Farbensatz, zu beweisen.*

Tipp: Führe eine vollständige Induktion über die Anzahl der Knoten.

Nächste Woche werden wir den Beweis dann erweitern um den 5-Farbensatz zu zeigen.