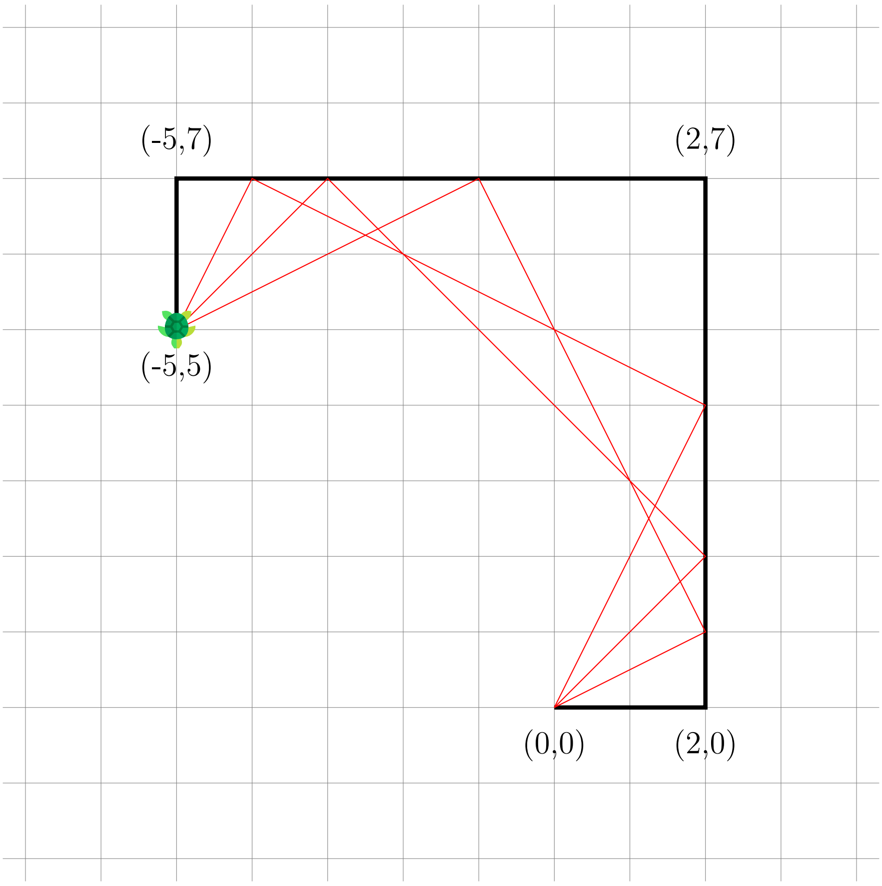

Abbildung 1: Die Anstiege der roten Laser sind jeweils das negative der Lösungen der zugehörigen Gleichung – hier: $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$.

1 Laser und Schildkröten

Es ist eine berühmte Tatsache, dass wir Gleichungen vom Grad $n \geq 5$ im Allgemeinen nicht lösen können. Zumindest nicht exakt mit Formeln, die nur n-te Wurzel und sowas verwenden. Es wurden aber über die Zeit interessante und nützliche Methoden entwickelt, um Gleichungen lösen zu können und die hier gezeigte Methode ist eine fast verschollene geometrische Herangehensweise.

Man nehme eine Polynomgleichung, zum Beispiel $2x^3+7x^2+7x+2 = 0$. Dann lege man eine Schildkröte auf den Punkt (0,0) und drehe sie so, dass sie in positive x-Richtung schaut. Jetzt bewegt sie sich eine Distanz entsprechend des ersten Koeffizienten des Polynoms nach vorne – hier 2 – und dreht sich um 90° entgegen des Uhrzeigersinns. Danach bewegt sie sich entsprechend des zweiten Koeffizienten nach vorne und dreht sich wieder um 90°. Falls der Koeffizient negativ ist, dann bewegt sich die Schildkröte entsprechend rückwärts, ist der Koeffizient 0, dann bewegt sie sich gar nicht. Aber: Nach jedem Koeffizienten dreht sie sich um 90°. Nach endlich vielen Schritten ist die Schildkröte an ihrem Ziel angekommen und hat einen Pfad hinterlassen. Jetzt schießen wir vom Nullpunkt aus einen Laser, welcher besonderen Abprallregeln folgt: Trifft der Laser auf die Gerade eines hinterlassenen Pfades (er muss nicht unbedingt den Pfad selbst treffen, man stelle sich den Pfad unendlich erweitert vor) dann prallt er im 90°-Winkel ab und zwar so, dass er

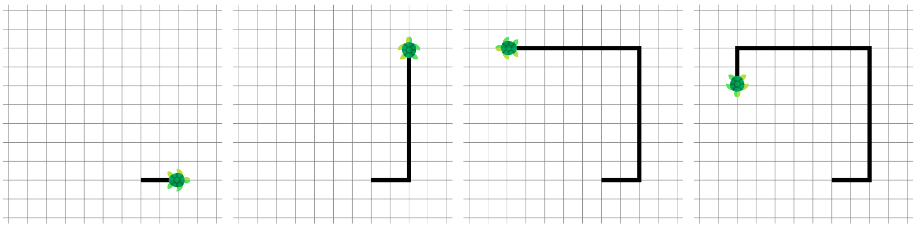

Abbildung 2: Der Weg der Schildkröte für das Polynom $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$.

die nächste Gerade des Pfades schneiden kann. Wir richten den Laser nun so aus, dass er unter diesen Regeln die Schildkröte trifft. Betrachte den Anstieg des Laser in dieser Position. Das negative des Anstiegs ist eine Nullstelle des Polynoms. In Abbildung 1 ist zu sehen, dass dieser Prozess 3 mögliche Laserausrichtungen besitzt, die die Schildkröte treffen. Die Anstiege dieser Laser sind 2, 1 und $1/2$ und tatsächlich sind die Nullstellen von $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$ bzw. die Lösungen von $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$ genau $-1/2$, -1 und -2.

Aufgabe 1 Zeichne den Weg der Schildkröte für die Polynome

- $p_1(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$
- $p_2(x) = x^3 + 2x^2 + x$
- $p_3(x) = 2x^3 - 9x^2 + 13x - 6$
- $p_4(x) = x^2 - 1$

Ermittle die Nullstellen indem du Laser auf die Schildkröte richtest.

Wieso funktioniert das? Dazu schauen wir exemplarisch auf ein Polynom dritten Grades $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a, b, c, d > 0$. Das Bild dazu sieht wie in Abbildung 3 aus.

Aufgabe 2 Benutze Abbildung 3 um zu beweisen, dass das Polynom ausgewertet an der Stelle x – wobei $-x$ der Anstieg des Lasers ist – der Abstand des letzten Aufprallpunkts des Lasers zur Schildkröte ist. Folgere, dass x eine Nullstelle ist, wenn der Laser die Schildkröte trifft.

Tipp: Suche ähnliche Dreiecke. Du kannst welche finden :)

Aufgabe 3 Für quadratische Gleichungen funktioniert diese Methode natürlich dann auch und sogar noch besser. Es nämlich nicht nötig den Anstieg durch Ausprobieren zu finden. Löse die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mithilfe der Schildkröten-Laser-Methode und beweise damit auf neue Art und Weise die p-q-Formel.

Aufgabe 4 Zeige, wie sich die zwei folgenden Aussagen in der Schildkröten-Laser-Methode widerspiegeln.

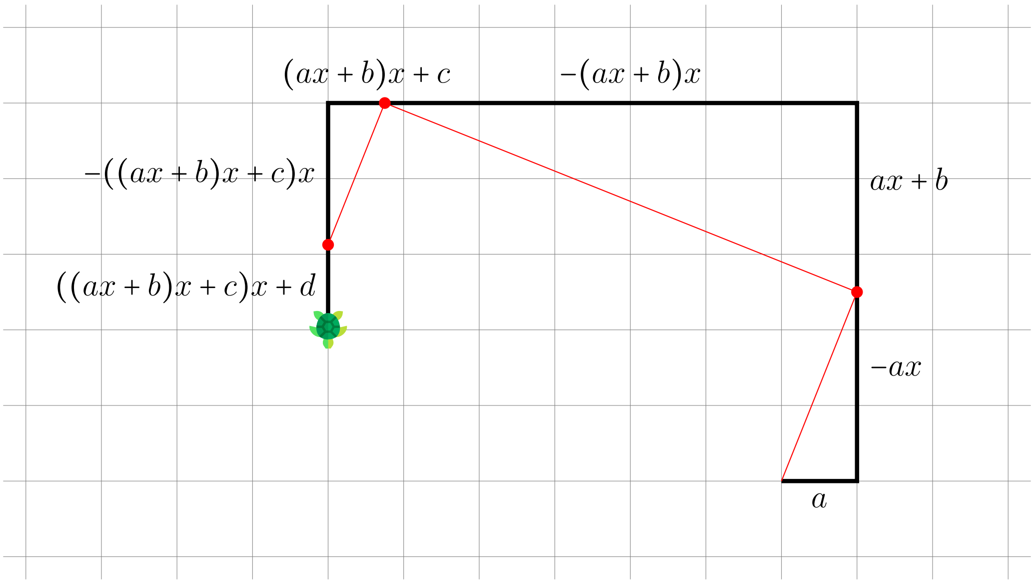

Abbildung 3: Lösungsskizze des Beweises.

(a) Sind $x_1, x_2, \dots, x_n$ die Lösungen der Gleichung $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0$, dann sind $-x_1, -x_2, \dots, -x_n$ die Lösungen der Gleichung $q(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k x^k = 0$.

(b) Ist $x = r$ Lösung der Gleichung $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + \dots a_1 x + a_0 = 0$, dann ist $x = 1/r$ Lösung der Gleichung $q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x^k = a_0 x^n + \dots a_{n-1} x + a_n = 0$.

Aufgabe 5 Finde eine Nullstelle der folgenden Polynome.

- $p_1(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
- $p_2(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$
- $p_3(x) = x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 29x + 30$
- $p_4(x) = 9x^2 + 6x + 1$

Tipp: Du darfst diese Webseite als Hilfestellung verwenden.

Bonus: Finde alle Nullstellen von p_3.

In Aufgabe 5 sehen wir, dass es mit dieser Methode gar nicht so leicht ist, Polynomgleichungen zu lösen, die komplizierte Zahlen als Lösung haben. Und was ist eigentlich mit doppelten Lösungen? Und warum zeigt diese Methode, die auch als Lills-Methode bekannt ist, dass Origami stärker ist als Zirkel und Lineal? Dazu kommen wir dann im nächsten Blatt :)