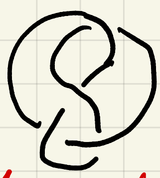
Topologie III

Zwei Knoten heißen äquivalent (ambient isotop), falls man sie durch die Reidemeisterzüge ineinander überführen kann.

Dies macht es jedoch schwer zu zeigen, dass zwei Knoten nicht äquivalent sind. Zu diesem Zweck nutzen wir Invarianten. Das sind Eigenschaften von Knoten, welche sich durch Reidemeisterzüge nicht ändern.

Beispiele für Invarianten

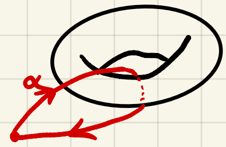
- Kreuzungszahl $\rightsquigarrow$ Aufgabe: Finde einen Knoten mit der Kreuzungszahl 4.
- Dreifärbbarkeit
- Anzahl der Dreifärbungen



Achterknoten

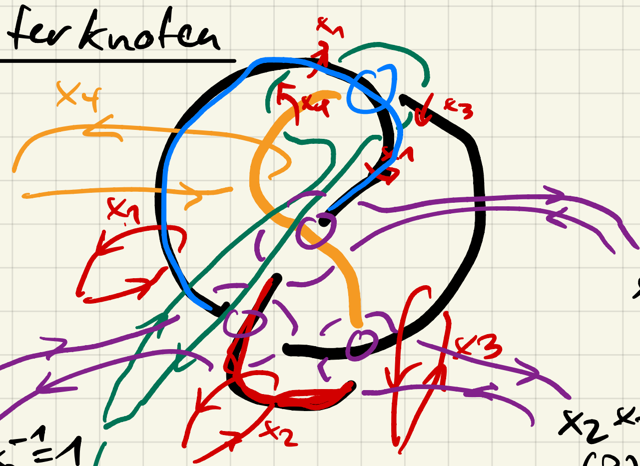
Knotengruppen

Wir wollen Fundamentalgruppen nutzen. Jedoch stellen wir fest, dass jeder Knoten eine geschlossene Schleife ist, und daher $\pi_1(K) = \mathbb{Z}$. Stattdessen betrachten wir daher alles außer dem Knoten, d.h. $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$. Für den trivialen Knoten erhalten wir $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) = \mathbb{Z}$.



Für kompliziertere Knoten können wir die Fundamentalgruppe mit Hilfe des Wirtinger Algorithmus bestimmen.

Der Achterknoten



$x_4^{-1} x_2^{-1} x_4 x_1 = 1$
(4)

$x_2 x_3 x_4 x_3^{-1} = 1$
(3)

(1) $x_1 x_2 x_3^{-1} x_2^{-1} = 1$

$\Rightarrow x_4 x_1 x_3 x_1^{-1} = 1$ (2)

(3) $\Leftrightarrow$ $x_2 = x_3 x_4^{-1} x_3^{-1}$

(2) $\Leftrightarrow$ $x_4 = x_1 x_3^{-1} x_1^{-1}$

(2) in (3) $\Rightarrow$ $x_2 = x_3 x_1 x_3 x_1^{-1} x_3^{-1}$

in (1) $\Rightarrow$ $x_1 x_3 x_1 x_3 x_1^{-1} x_3^{-1} \cancel{x_3^{-1}} \cancel{x_3} x_1 x_3^{-1} x_1^{-1} x_3^{-1} = 1$

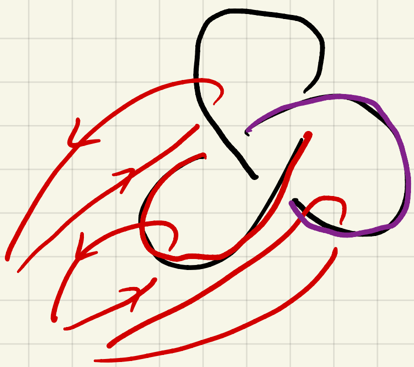
$\Leftrightarrow x_1 x_3 x_1 x_3 x_1^{-1} x_3^{-1} x_1 x_3^{-1} x_1^{-1} x_3^{-1} = 1$

$\Rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) = \langle x_1, x_3 \mid x_1 x_3 x_1 x_3 x_1^{-1} x_3^{-1} x_1 x_3^{-1} x_1^{-1} x_3^{-1} \rangle$

Und wir sehen, dass der Achterknoten damit eine andere Knotengruppe als der triviale Knoten hat.

Der Kleeblattknoten

$\langle a, b \mid a^2 = b^3 \rangle$



$\langle a, b \mid aba\, b^{-1} a^{-1} b^{-1} \rangle$

$aba = bab$