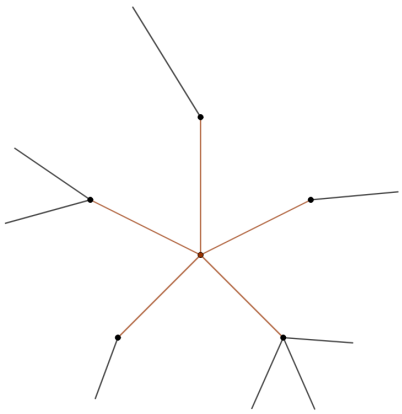
Graphentheorie IV

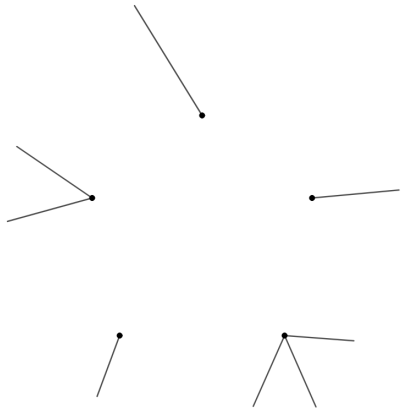
Der 5-Farbensatz

Nachdem wir letzte Woche den Beweis des 5-Farbensatzes begonnen haben, wollen ihn in dieser Serie abschließen. Dazu wollen wir den Beweis des 6-Farbensatzes aus den Hausaufgaben nun erweitern. Zur Erinnerung, wir hatten eine gegebene Landkarte durch einen planaren Graphen dargestellt und im ersten Schritt gezeigt, dass dieser immer mindestens einen Knoten mit Grad höchstens 5 besitzen muss. Um nun zu beweisen, dass jeder solche planare Graph 6-färbbar ist, führen wir eine vollständige Induktion über die Anzahl der Knoten im Graphen durch.

Da der Induktionsanfang trivial ist, gehen wir gleich zum Induktionsschritt über. Gegeben sei ein planarer Graph mit n Knoten, von welchem wir nun zeigen wollen, dass dieser 6-färbbar ist. Dabei wissen wir schon, dass dies für alle Graphen mit weniger als n Knoten zutrifft. Wir haben letzte Woche gezeigt, dass einer der Knoten den Grad höchstens 5 besitzt. Der Trick ist nun, diesen Knoten und alle seine Kanten zu entfernen.



Knoten mit 5 Nachbarn



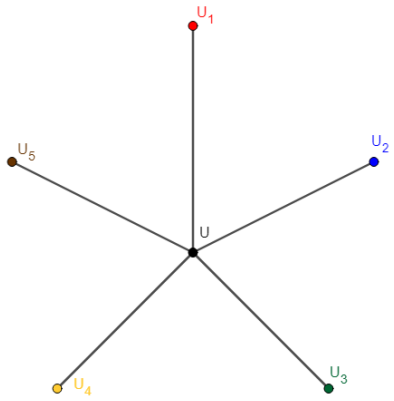
Nach Entfernen des Knotens

Dadurch erhalten wir einen planaren Graphen mit $n - 1$ Knoten. Dieser ist jedoch nach Induktionsannahme mit 6 Farben färbbar. Um daraus eine Färbung für unseren originalen Graphen zu erhalten, müssen wir uns nur noch überlegen, warum wir den zuvor entfernten Knoten auch so färben können, dass sich keine zwei Farben berühren. Da dieser Knoten jedoch nur höchstens fünf Nachbarn hat, muss es definitiv eine Farbe geben, mit welcher keiner seiner Nachbarn gefärbt ist. Wir wählen also genau diese Farbe und erhalten damit eine 6-Färbung für unseren originalen Graphen.

Der Beweis des 5-Farbensatzes folgt der gleichen Idee, ist jedoch etwas komplizierter. Wir führen wieder eine Induktion über die Anzahl der Knoten durch und bemerken im Induktionsschritt auch wieder zuerst, dass es einen Knoten $U \in V$ geben muss, welcher vom Grad 5 oder kleiner ist. Auch erhalten wir wieder eine Färbung der restlichen Knoten, indem wir den Graphen ohne U betrachten und die Induktionsvoraussetzung nutzen. Nun unterscheiden wir zwei Fälle: der Knotengrad ist kleiner als 5 und der Knotengrad ist gleich 5.

Aufgabe 1 *Zeige für den Fall* $\deg(U) < 5$*, dass der Graph 5-färbbar ist.*

Wir nehmen also $\deg(U) = 5$ an. Wir bezeichnen die fünf Nachbarknoten mit $U_1, \dots, U_5$ im Uhrzeigersinn. Falls zwei dieser Knoten die gleiche Farbe haben, so gibt es immer eine Farbe, mit welcher keiner der fünf Knoten gefärbt wurde und mit dieser können wir U dann ohne Probleme färben. Betrachten wir also den Fall, dass $U_1, \dots, U_5$ verschiedene Farben haben.



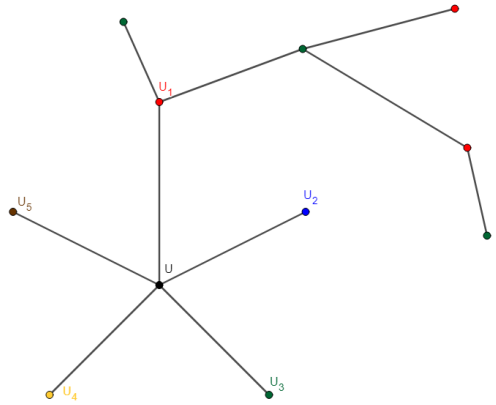
Um den Beweis anschaulicher zu machen, seien o.B.d.A. $U_1, \dots, U_5$ in den obigen Farben gefärbt. Das Ziel ist es jetzt, diese Knoten (und entsprechend auch den restlichen Graphen!) so umzufärben, dass wir für U wieder eine freie Farbe haben. Dazu betrachten den Graphen $G_{\text{rot,grün}}$, welcher entsteht, wenn wir nur die roten und grünen Knoten und die Kanten zwischen diesen aus G nehmen. Gleichzeitig definieren wir analog $G_{\text{blau,gelb}}$. Wir wollen jetzt die Zusammenhangskomponenten dieser Graphen analysieren.

Aufgabe 2 *Angenommen* U_1 *und* U_3 *liegen in der gleichen Zusammenhangskomponente von* $G_{rot,grün}$*, d.h. es gibt einen Weg zwischen ihnen, welcher nur rote und grüne Knoten benutzt. Zeige, dass dann* U_2 *und* U_4 *nicht in der gleichen Zusammenhangskomponente von* $G_{blau,gelb}$ *liegen können.*

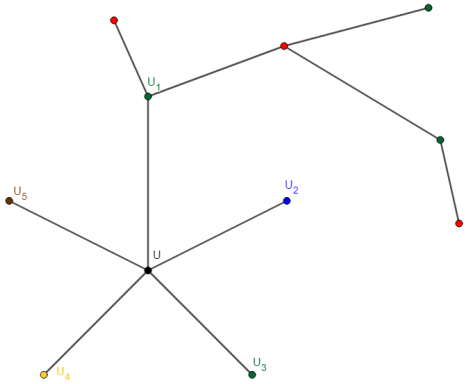
Wir wissen also, dass U_1 und U_3 in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von $G_{\text{rot,grün}}$ oder U_2 und U_4 in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von $G_{\text{blau,gelb}}$ liegen. Nehmen wir o.B.d.A. an, dass der erste Fall zutrifft. Das heißt also, dass es keinen Weg zwischen diesen gibt, welcher nur rote und grüne Knoten benutzt. Wir wählen jetzt die Zusammenhangskomponente aus, in welcher U_1 liegt und vertauschen in dieser rot und grün.

Jetzt ist eine Färbung entstanden, bei welcher nur vier verschiedene Farben an unseren Knoten U angrenzen. Wir können also U ohne Probleme *rot* färben.

Aber warum ist diese neue Färbung überhaupt valide? Innerhalb der umgefärbten Zusammenhangskomponente hatten wir vorher nur Kanten mit genau einem roten und einem grünen Knoten. Dies ist auch nach dem Umfärben noch so. Außerhalb der Zusammenhangskomponente haben wir nichts geändert. Und bei Kanten, welche von einem Knoten



Vor dem Umfärben



Nach dem Umfärben

innerhalb der Zusammenhangskomponente zu einem Knoten außerhalb führen, so stellen wir fest, dass der Knoten außerhalb nicht mit rot oder grün gefärbt sein kann, da er sonst auch zur gleichen Zusammenhangskomponente gehören würde. Daher kann auch hier kein Problem durch die Umfärbung entstanden sein.

Damit haben wir also eine 5-Färbung für den Ausgangsgraphen gefunden.

Der Freundschaftssatz

Nach dem 5-Farbensatz wollen wir uns als nächstes mit einem neuen Problem in der Graphentheorie beschäftigen, dem *Freundschaftssatz*. Dieser besagt

Wenn in einem Raum je zwei Personen genau einen gemeinsamen Freund haben, so gibt es eine Person, die mit allen anderen befreundet ist.

Dabei gehen wir davon aus, dass Freundschaften immer beidseitig sind, und niemand mit sich selbst befreundet ist. Mathematisch wird das dann wie folgt formuliert

Freundschaftssatz *Falls in einem Graphen je zwei verschiedene Knoten immer genau einen gemeinsamen Nachbarn haben, so gibt es einen Knoten, welcher mit allen anderen verbunden ist.*

Solche Graphen, in denen je zwei verschiedene Knoten immer genau einen gemeinsamen Nachbarn haben, nennen wir *Freundschaftsgraphen*.

Aufgabe 3 *Gebe Freundschaftsgraphen mit 3, 5,7 und 9 Knoten an. Kann es Freundschaftsgraphen mit einer geraden Anzahl an Knoten geben? Du darfst in deiner Begründung den Freundschaftssatz benutzen.*

Aufgabe 4 *In den Graphen aus Aufgabe 3 ist ein Muster zu erkennen. Zeige mit Hilfe des Freundschaftssatzes, dass solche Freundschaftsgraphen immer diese Form haben.*