Funktionalgleichungen I

In dieser Woche wollen wir uns Funktionalgleichungen angucken. Das sind Gleichungen wie z.B.

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y),\ \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{1}$$

bei denen, im Gegensatz zu sonst, die Funktionen selbst gesucht sind. Genauer suchen wir in diesem Beispiel alle stetigen Funktionen f, so dass die Gleichung (1) für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.

Bevor wir jedoch zu diesem fortgeschrittenem Beispiel kommen, wollen wir unsere Aufmerksamkeit zunächst auf ein paar einfachere Gleichungen wenden. Wir starten mit

$$f(x+y) = f(x) + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{2}$$

wobei hier wieder alle *stetigen* Lösungen gesucht sind. Warum wir diese Stetigkeit brauchen, sehen wir gleich beim Lösen dieser Funktionalgleichung.

Wir nehmen als erstes an, f wäre eine Lösung von (2). Unser erstes Ziel ist es, aus (2) weitere Eigenschaften von f herauszufinden. Dazu können wir z.B. spezielle Werte für x und y einsetzen. So ergibt sich mit $x = y = 0$ unser erstes Resultat: $f(0+0) = f(0) + f(0)$, d.h. $f(0) = 0$. Setzen wir hingegen $y = -x$, so erhalten wir $f(x-x) = f(x) + f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zusammen mit dem vorherigen Resultat ergibt sich $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, f ist also *ungerade*.

Eine andere Möglichkeit ist $x = y$ in (2). Dadurch erhalten wir $f(x+x) = f(x) + f(x)$, d.h. $f(2x) = 2f(x)$. Dieses Ergebnis lässt sich auch verallgemeinern:

Aufgabe 1 Zeige durch Induktion und durch das Einsetzen passender Werte in (2), dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(nx) = nf(x)$. Beweise danach, dass dies sogar für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt.

Haben wir diese Gleichung für alle $n \in \mathbb{Z}$ bewiesen, so können wir daraus auch herleiten, dass sie für alle rationalen Zahlen $r \in \mathbb{Q}$ gilt: Da r rational ist, gibt es $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$ mit $r = \frac{p}{q}$. Dann folgt aus dem bereits bewiesenen, dass

$$\begin{aligned} f\left(\frac{p}{q} \cdot x\right) &= f\left(p \cdot \frac{x}{q}\right) = p \cdot f\left(\frac{x}{q}\right) \\ f(x) &= f\left(q \cdot \frac{x}{q}\right) = q \cdot f\left(\frac{x}{q}\right) \end{aligned}$$

Insbesondere folgt also $f(rx) = f(\frac{p}{q} \cdot x) = \frac{p}{q} \cdot f(x) = rf(x)$ für alle $r \in \mathbb{Q}$. Um jetzt jedoch zu den reellen Zahlen zu kommen, benötigen wir die schon angesprochene Stetigkeit:

Aufgabe 2 Begründe, dass $f(rx) = rf(x)$ dann auch für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt.

Jetzt sind wir an einem Punkt angekommen, wo wir eine explizite Form von f hinschreiben können. So setzen wir z.B. $x = 1$ und erhalten $f(x) = xf(1)$. Wichtig ist an dieser Stelle zu bemerken, dass $c \coloneqq f(1)$ ja eine Konstante ist und wir damit die Form

$$f(x) = c \cdot x, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

haben. Zu beachten ist, dass wir zwar gezeigt haben, dass jede Lösung von (2) diese Form hat, jedoch nicht, dass jede Funktion dieser Form auch (2) löst. Dazu reicht jedoch eine einfache Probe: für jedes $c \in \mathbb{R}$ gilt, dass $c \cdot (x + y) = c \cdot x + c \cdot y$. Also sind die Lösungen von (2) genau die Funktionen der Form $f(x) = c \cdot x$, wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig ist.

Es gibt nebenbei noch drei sehr ähnliche Funktionalgleichungen

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{3}$$
$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{4}$$
$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{5}$$

bei denen wieder die *stetigen* Lösungen gesucht sind. Insgesamt sind diese vier sind unter dem Namen *Cauchysche Funktionalgleichungen* bekannt. Das Praktische ist, dass wir diese im Endeffekt schon gelöst haben, da wir diese durch Substitution auf (2) zurückführen können. Nehmen wir als Beispiel (3): Wir definieren eine neue Funktion $g(x) \coloneqq f(e^x)$, welche als Verknüpfung zweier stetiger Funktionen wieder stetig ist. Dann erfüllt diese die Gleichung

$$g(x + y) = f(e^{x+y}) = f(e^x \cdot e^y) = f(e^x) + f(e^y) = g(x) + g(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Die stetigen Lösungen dieser Gleichung sind uns jedoch bekannt und wir erhalten damit $g(x) = c \cdot x$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Wir erhalten also $f(e^x) = c \cdot x$. Setzen wir nun $y = e^x$, erhalten wir $f(y) = c \cdot \log y$. Wichtig ist hier jedoch zu beachten, dass wir dies nur für $y > 0$ bewiesen haben, da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Um auf die restlichen Funktionswerte zu schließen, müssen wir uns nochmal die Ausgangsgleichung angucken. Aus $x = y = 0$ erhalten wir wieder $f(0) = 0$ und durch $x = y$ erhalten wir $f(x) + f(x) = f(x^2)$, woraus wir durch Einsetzen von $-x$ herleiten können, dass $f(-x) + f(-x) = f((-x)^2) = f(x^2) = f(x) + f(x)$. Es gilt also $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. f ist *gerade*. Nehmen wir nun alle unsere Ergebnisse zusammen, so folgt

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot \log |x| & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Wieder müssen wir natürlich überprüfen, ob jede Funktion dieser Form auch eine Lösung von (3) ist. Dies bleibt jedoch an dieser Stelle als Übungsaufgabe dem geneigten Leser überlassen.

Aufgabe 3 Finde je alle *stetigen* Lösungen der Funktionalgleichungen (4) bzw. (5) durch Zurückführen auf Gleichung (2) oder (3).

Jetzt sind wir bereit, uns unserem Einführungsbeispiel (1) zu widmen. Der Trick an dieser Stelle ist es, die Gleichung als

$$f(x+y) = f(x) + x^2y + yx^2 + f(y)$$

zu schreiben, und durch das Erkennen der binomischen Formel $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ schon mal eine Lösung zu erraten: $f_0(x) \coloneqq \frac{1}{3}x^3$. Indem wir nun dieFunktion $g(x) \coloneqq f(x) - f_0(x)$ betrachten, erhalten wir die einfachere Gleichung

$$g(x+y) = g(x) + g(y)$$

Wichtig ist, dass g als Summe von zwei stetigen Funktionen wieder stetig ist. Jetzt können wir nutzen, dass wir alle stetigen Lösungen dieser Gleichung bereits kennen, und erhalten also $g(x) = c \cdot x$, $c \in \mathbb{R}$. Es gilt also

$$f(x) = g(x) + f_0(x) = c \cdot x + \frac{1}{3}x^3$$

In der Tat erfüllt f auch für jede Wahl von $c \in \mathbb{R}$ unsere Ausgangsgleichung, d.h. die f sind genau die stetigen Lösungen von (1).

Zum Abschluss gibt es noch eine Aufgabe zum Üben:

Aufgabe 4 Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche

$$2f(x) = f(x+y) + f(x+2y)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$ erfüllen. Beachte, dass f nicht notwendigerweise stetig ist.