Das Extremalprinzip

Diese Woche wollen wir uns an das Extremalprinzip erinnern. Kurz zusammengefasst, lautet es "betrachte immer ein extremes Element", also z.B. die kleinste oder die größte Lösung. Was das genau bedeutet, wollen wir im folgenden sehen.

Beispiel 1 *Finde alle paare natürlicher Zahlen (x, y), welche $2x^2 - 3y^2 = 0$ erfüllen.*

Wir stellen zuerst fest, dass $(0, 0)$ eine Lösung ist. Unser Ziel ist es jetzt zu zeigen, dass dies das einzige solche Paar ist. Dazu wollen wir das Extremalprinzip nutzen. Sei also (x, y) die kleinste Lösung mit $x, y > 0$, wobei wir die Paare nach der Summe $x + y$ sortieren. Es gilt also $2x^2 = 3y^2$. Da jedoch die linke Seite durch 2 teilbar ist, muss $3y^2$ auch durch zwei teilbar sein und insbesondere gilt also $2|y$. Analog folgern wir $3|x$. Damit gilt also

$$2\left(3 \cdot \frac{x}{3}\right)^2 = 3\left(2 \cdot \frac{y}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 3\left(\frac{x}{3}\right)^2 = 2\left(\frac{y}{2}\right)^2$$

Insbesondere ist also $(\frac{y}{2}, \frac{x}{3})$ auch eine Lösung unserer Gleichung, welcher sogar kleiner als (x, y) ist. Damit haben wir einen Widerspruch dazu, dass (x, y) minimal war und $(0, 0)$ muss die einzige Lösung sein.

An folgenden Aufgaben könnt ihr das Prinzip üben

Aufgabe 1 *Zeige, dass $a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2)$ nur die Lösung $a = b = c = d = 0$ hat.*

Aufgabe 2 *Finde alle natürlichen Lösungen der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.*

Als Tipp zu den beiden Aufgaben, erinnert euch an quadratische Reste. Also welche Reste kann z.B. $x^2 \mod 4$ haben? Und was daraus für $x^2 + y^2 \mod 4$?

$x \mod 4$	0	1	2	3
$x^2 \mod 4$	0	1	0	1

Das Extremalprinzip hat jedoch viele verschiedene Anwendungsgebiete. So können wir auch folgende Geomtrieaufgabe damit lösen.

Beispiel 2 In einer Ebene seien $2n$ verschiedene Punkte $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$ gegeben, so dass keine drei von ihnen auf einer Geraden liegen. Zeige, dass man jeweils einen Punkt aus $A := \{A_1, \dots, A_n\}$ mit einem Punkt aus $B := \{B_1, \dots, B_n\}$ durch eine gerade Strecke so verbinden kann, dass sich diese Strecken nicht schneiden.

Wir betrachten die Menge aller Bijektionen zwischen A und B. Jede Bijektion gehört nach Konstruktion zu einer Möglichkeit die Punkte aus A mit den Punkten aus B zu verbinden. Wir müssen nun zeigen, dass sich bei einer dieser Bijektionen die Strecken nicht schneiden.

Wir berechnen dazu für jede Bijektion φ die Gesamtlänge $l(\varphi)$ der Strecken, d.h.

$$l(\varphi) := |A_1\,\varphi(A_1)| + \ldots + |A_n\,\varphi(A_n)|$$

Jetzt sei φ eine Bijektion, für die $l(\varphi)$ minimal ist. Angenommen, es schneiden sich zwei der Strecken, o.b.d.A. seien diese $A_1\varphi(A_1)$ und $A_2\varphi(A_2)$. Der Schnittpunkt sei M.

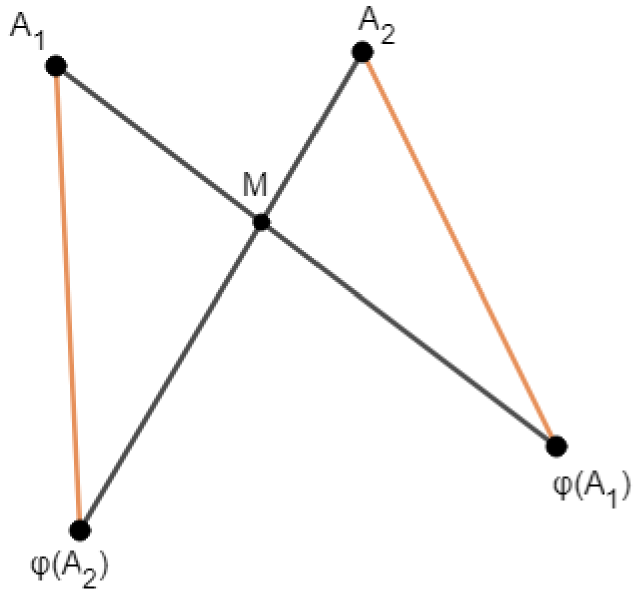

Abbildung 1: Skizze

Aus der Dreiecksungleichung in den Dreiecken $A_1M\varphi(A_2)$ und $M\varphi(A_1)A_2$ folgt jedoch, dass

$$|A_1\,\varphi(A_2)| + |A_2\,\varphi(A_1)| < |A_1\,\varphi(A_1)| + |A_2\,\varphi(A_2)|$$

Wenn wir also die Bijektion φ' betrachten, bei welcher wir A_1 auf $\varphi(A_2)$, A_2 auf $\varphi(A_1)$ abbilden und den Rest von φ nicht verändern, so gilt folglich $l(\varphi') < l(\varphi)$. Das ist jedoch ein Widerspruch dazu, dass $l(\varphi)$ minimal war. Also muss unsere Annahme falsch gewesen sein, d.h. φ erfüllt bereits unsere Bedingung, dass sich keine zwei Strecken schneiden.

Aufgabe 3 *Eine Punktmenge S der Ebene habe die Eigenschaft, dass jeder Punkt in S der Mittelpunkt einer Strecke ist, deren Endpunkte wieder in S liegen. Beweise, dass S unendliche viele Punkte enthält.*

Tipp: Nehme an, dass S endlich wäre. Wie könntest du das Extremalprinzip anwenden?