Berichte der Gruppen

Nullstellen komplexer Polynome

Teilnehmer:

8 Schülerinnen und Schüler	Andreas-Gymnasium Heinrich-Hertz-Gymnasium Immanuel-Kant-Gymnasium Käthe-Kollwitz-Gymnasium

mit tatkräftiger Unterstützung durch:

Julika Genz	Humboldt-Universität zu Berlin

Gruppenleiter:

Helga Baum	Humboldt-Universität zu Berlin

1. Einführung in die komplexen Zahlen

Die Beschäftigung mit reellen Polynomen führt zu dem Ergebnis, dass in einigen Fällen Lösungen existieren, in anderen Fällen aber nicht. Besonders markant ist das Fehlen einer Lösung der Gleichung

$$x^2 = -1.$$

Dies liefert Anlass für eine Erweiterung des Zahlenbereichs der reellen Zahlen. Eine Betrachtung von Zahlen als Vektoren in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ hat historisch gesehen Einsicht in dieses Thema geliefert. Spezieller, die Betrachtung von -1 als den Vektor $\binom{-1}{0}$. Wenn man Vektoren multipliziert, indem man ihre Beträge multipliziert und ihre Winkel addiert (eine Eigenschaft, die wir später wiederfinden werden), ist geometrisch gesehen der Vektor, der mit sich selbst multipliziert den Vektor $\binom{-1}{0}$ ergibt, schlicht der Vektor $\binom{0}{1}$. Die Zahl, die zu diesem Vektor gehört, nennen wir i, die sogenannte *imaginäre Einheit*. Damit ist also die Lösung der Gleichung gefunden, es gilt

$$i^2 = -1.$$

Entsprechend folgt auch

$$(-i)^2 = -1.$$

Wir definieren nun die *imaginären Zahlen* $i\mathbb{R}$ auf der imaginären Achse:

$$i\mathbb{R} := \{bi \mid b \in \mathbb{R}\}.$$

Im Folgenden definieren wir die Menge der komplexen Zahlen, die überall auf der sogenannten *komplexen Zahlenebene* oder auch der *Gaußschen Zahlenebene* liegen. Es wird sozusagen die reelle Ebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ durch $\mathbb{R} \times i\mathbb{R}$ ausgetauscht. Betrachtete Vektoren sind dann die komplexen Zahlen. Wir definieren also:

$$\mathbb{C} := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Ziel unseres Kurses war der Beweis des *Fundamentalsatzes der Algebra*, der besagt, dass jedes komplexe Polynom $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ vom Grad $n \geq 1$ genau n komplexe Nullstellen besitzt. Die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des Polynoms sind dabei komplexe Zahlen.

2. Grundlegende Operationen auf komplexen Zahlen

2.1. Definitionen

Sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl. Dann definieren wir

$Re(z) := a$	Der Realteil von z
$Im(z) := b$	Der Imaginärteil von z
$\overline{z} := a - bi$	Die konjugiert-komplexe Zahl zu z
$\lvert z\rvert := \sqrt{a^2 + b^2}$	Der Betrag von z (Abstand vom Nullpunkt)
$\lvert z_1 - z_2\rvert$	Den Abstand zweier komplexer Zahlen

2.2. Rechenoperationen

Seien $z_1 = a + bi,\ z_2 = c + di\ \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &:= (a+c) + i(b+d), \\ z_1 \cdot z_2 &:= (ac - bd) + i(ad + bc), \\ Re(z_1) &\leq |z_1|, \\ Im(z_1) &\leq |z_1|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2|, \\ z_1 \cdot \overline{z_1} &= |z_1|^2, \\ \overline{z_1 + z_2} &= \overline{z_1} + \overline{z_2}, \\ \overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \\ z_1 + \overline{z_1} &= 2Re(z_1). \end{aligned}$$

2.3. Dreiecksungleichungen

Satz 1. *Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2| && \textit{(Dreiecksungleichung } \triangle\textit{)} \\ |z_1 + z_2| &\geq \big||z_1| - |z_2|\big| && \textit{(umgekehrte Dreiecksungleichung } \triangledown\textit{)} \end{aligned}$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_1)} \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + \overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + \overline{z_1}z_2 + \overline{\overline{z_1}z_2} \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(\overline{z_1}z_2) \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|\overline{z_1}z_2| \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2. \end{aligned}$$

Aufgrund der Monotonie der Quadratfunktion folgt

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

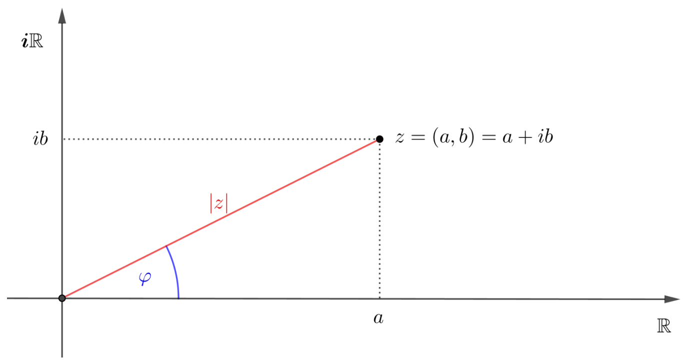
Der Beweis für die umgekehrte Dreiecksungleichung kann mit Hilfe der Dreiecksungleichung geführt werden und wird dem geneigten Leser als Übung überlassen. □

2.4. Polare Koordinaten

Nun vereinbaren wir eine alternative Schreibweise komplexer Zahlen. Bekanntermaßen ist jeder Punkt z der Ebene (ausser dem Ursprung) bzw. jede komplexe Zahl $z = a + ib \neq 0$ durch den Abstand $r = |z|$ vom Ursprung und den orientierten Winkel φ mit der Abzisse eindeutig bestimmt. Aus trigonometrischen Betrachtungen ergibt sich schnell, dass

$$\begin{aligned} a &= r \cdot \cos\varphi, \\ b &= r \cdot \sin\varphi, \\ \text{und somit} \quad z &= a + bi = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi). \end{aligned}$$

Mit der *Euler-Identität* $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ kann man das auch in der Form $z = r \cdot e^{i\varphi}$ schreiben. Das ist die sogenannte *trigonometrische* oder *polare* Darstellung der komplexen Zahlen.



Sie erleichtert die Multiplikation von komplexen Zahlen:
Seien $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1},\ z_2 = r_2 e^{i\varphi_2} \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2 \cdot e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \\ &= r_1 r_2 \cdot (\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i \sin(\varphi_1+\varphi_2)). \end{aligned}$$

2.5. Wurzeln komplexer Zahlen

Potenzen von komplexen Zahlen sind wie Potenzen reeller Zahlen definiert:

$$\begin{aligned} z^0 &= 1, \\ z^{n+1} &= z \cdot z^n. \end{aligned}$$

Wie beim Multiplizieren ist es sinnvoll, beim Potenzieren (und Wurzelziehen) komplexer Zahlen ihre polare Darstellung zu verwenden. Es ergibt sich durch mehrfaches Anwenden der Multiplikationsregel auf $z = r \cdot e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ die *Formel von Moivre*

$$z^n = r^n \cdot e^{n \cdot i\varphi} = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Ferner lässt sie sich als direkte Schlussfolgerung der Additionstheoreme zeigen.
Da das Wurzelziehen als die Umkehrfunktion zum Potenzieren verstanden werden kann, verwenden wir folgende Formel zur Berechnung der Wurzeln.

Satz 2. *Sei $w = r \cdot e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$. Dann hat die Gleichung $z^n = w$ genau n verschiedene Lösungen $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ und für jede dieser Lösungen z_k gilt:*

$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)\right) = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)},$$

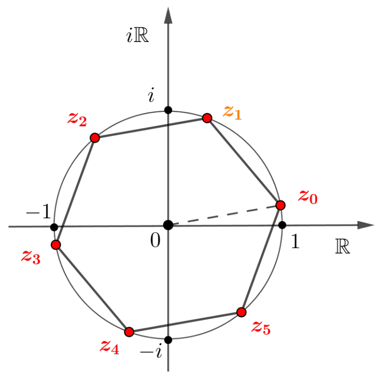
wobei $k \in \{0,\ 1,\ 2, \ldots, n-1\}$.

Das ergibt sich dadurch, dass in z_k^n innerhalb der Winkelfunktionen der Term

$$\varphi + k \cdot 2\pi$$

steht und besagte Winkelfunktionen periodisch mit Perioede 2π sind.

Die n-ten Wurzeln einer komplexen Zahl $w \neq 0$ bilden ein regelmäßiges n-Eck auf dem Kreis mit dem Radius $\sqrt[n]{|w|}$.



3. Konvergente Folgen und kompakte Teilmengen

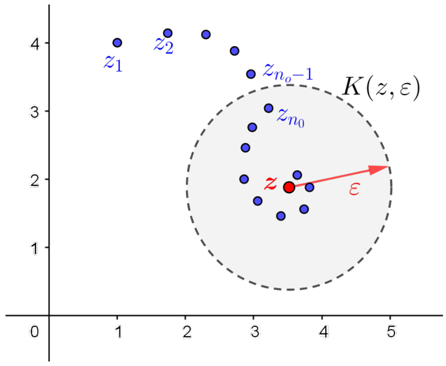
3.1. Konvergente Folgen

Erinnerung: Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen und $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ so dass } |a_n - a| < \varepsilon\ \forall\, n \geq n_0.$$

Die Definition der Konvergenz komplexer Zahlenfolgen sieht genauso aus, da wir auch den Abstand zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 als $|z_1 - z_2| \in \mathbb{R}$ kennen. Die *Epsilon-Umgebung*, die wir auch bei reellen Zahlenfolgen finden, hat dann die Form einer Kreisscheibe um den Grenzwert.
Sei (z_n) eine Folge komplexer Zahlen und $z \in \mathbb{C}$. Dann definieren wir:

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty} z_n = z \\ :\Longleftrightarrow \quad & \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ so dass } |z_n - z| < \varepsilon\ \forall\, n \geq n_0. \end{aligned}$$



Es gelten alle Grenzwertsätze, die auch für reelle Zahlenfolgen gelten. Dazu kommen folgende Sätze:

Satz 3. *Sei (z_n) eine komplexe Zahlenfolge mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$. Dann gilt.*

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \left|\lim_{n\to\infty} z_n\right| = |z|.$$

Satz 4. *Es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} Re(z_n) = Re(z) \;\; und \;\; \lim_{n\to\infty} Im(z_n) = Im(z).$$

Satz 5 (Satz von Bolzano - Weierstraß)**.**
Sei (z_n) eine beschränkte Folge komplexer Zahlen. So besitzt (z_n) immer eine konvergente Teilfolge (z_{n_k}).

Der Beweis dieses Satzes verwendet den Satz von Bolzano-Weierstraß für reelle Zahlenfolgen und Satz 3.

3.2. Kompakte Teilmengen

Für den weiteren Verlauf benötigen wir noch den Begriff der Kompaktheit. Dazu brauchen wir zwei weitere Begriffe: Abgeschlossenheit und Beschränktheit.

1. Wir bezeichnen eine Menge $M \subseteq \mathbb{C}$ als *abgeschlossen*, wenn alle konvergenten Folgen (z_n) aus M ihren Grenzwert auch in M haben.
2. Wir bezeichnen M als *beschränkt*, wenn ein Wert $C \in \mathbb{R}^+$ existiert, sodass $|z| \leq C$ für alle $z \in M$.
3. Wir bezeichnen M als *kompakt*, wenn M sowohl abgeschlossen als auch beschränkt ist.

Beispiel: Die Kreisscheibe $B(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$ ist kompakt.

Angenommen, $B(z_0, r)$ wäre nicht abgeschlossen. Dann gibt es eine konvergente Folge in $B(z_0, r)$, die gegen einen Wert z außerhalb der Kreisscheibe konvergiert. Jede Zahl außerhalb der Kreisscheibe besitzt einen positiven Abstand d zur Kreisscheibe. Wählen wir die Epsilon-Umgebung von z mit Radius kleiner als d, so sehen wir, dass z_n nicht gegen z konvergieren kann, was einen Widerspruch liefert.
Weiterhin ist $B(z_0, r)$ beschränkt durch $|z_0| + r + 1$. Somit ist $B(z_0, r)$ kompakt.

Wir beweisen nun ein Kriterium, welches uns die Frage nach der Kompaktheit von Mengen erleichtert.

Satz 6 (Folgenkriterium für Kompaktheit)**.**
Eine Menge $M \subset \mathbb{C}$ ist genau dann kompakt, wenn jede Folge (z_n) aus M eine Teilfolge (z_{n_k}) besitzt, deren Grenzwert in M liegt.

Beweis: ($\Longrightarrow$) Sei $M \subset \mathbb{C}$ kompakt und (z_n) eine beliebige Folge in M. M ist beschränkt, also existiert ein $r \in \mathbb{R}^+$ mit $|z| \leq r \ \forall z \in M$ und damit $|z_n| \leq r \ \forall n \in \mathbb{N}$. Somit ist die Folge (z_n) auch beschränkt, hat nach Satz 5 also eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert wiederum in M liegt, da M abgeschlossen ist. Somit ist die Teilfolge des Folgenkriteriums gefunden.

($\Longleftarrow$) Sei $M \subset \mathbb{C}$ eine Menge, die das Folgenkriterium erfüllt. Angenommen, M wäre nicht beschränkt. Dann existiert eine Folge (z_n) in M, so dass $|z_n| > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. (z_n) ist nicht beschränkt. Somit ist auch jede Teilfolge von (z_n) unbeschränkt und kann daher nicht konvergieren, ein Widerspruch zum Folgenkriterium. M ist also beschränkt. Als nächstes wird gezeigt, dass M abgeschlossen ist.
Sei (z_n) eine konvergente Folge in M mit Grenzwert $z \in \mathbb{C}$. Laut Folgenkriterium besitzt (z_n) eine konvergente Teilfolge (z_{n_k}), deren Grenzwert in M liegt. Aus

$$z = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{k\to\infty} z_{n_k} \in M$$

folgt $z \in M$. Somit ist M auch abgeschlossen und daher ist M kompakt. $\square$

4. Die Eigenschaften stetiger Funktionen auf kompakten Mengen

Der folgende Abschnitt zur Betrachtung stetiger Funktionen auf kompakten Mengen führt uns zum dritten Grundbaustein für den Beweis des Fundamentalsatzes.

Hierbei betrachten wir zuerst die Stetigkeit, welche analog zur Stetigkeit reeller Funktionen ist:

Definition 1. Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt in $p \in D$ stetig, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $z \in D$ gilt:

$$|z - p| < \delta \implies |f(z) - f(p)| < \varepsilon.$$

Ist f in jedem Punkt $p \in D$ stetig, so heißt f stetig.

Satz 7 (Folgenkriterium für Stetigkeit)**.**
Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist genau dann in $p \in D$ stetig, wenn für jede Folge (z_n) aus D, die gegen p konvergiert, die Bildfolge $(f(z_n))$ gegen $f(p)$ konvergiert.

Beweis: ($\Longrightarrow$) Wir wählen uns eine beliebige Funktion f, welche in $p \in D$ stetig ist und zeigen zuerst, dass das Folgenkriterium für Stetigkeit gilt: Sei (z_n) eine beliebige Folge in D mit $z_n \to p$. Wir wollen zeigen, dass die Bildfolge $(f(z_n))$ gegen $f(p)$ konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Da f in p stetig ist, existiert nach Definition ein $\delta > 0$, so dass $|f(z) - f(p)| < \varepsilon$ für alle $z \in D$ mit $|z - p| < \delta$. Da nach Voraussetzung (z_n) gegen p konvergiert, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|z_n - p| < \delta$ für alle $n \geq n_0$. Daraus folgt schließlich $|f(z_n) - f(p)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, was bedeutet, dass die Folge $(f(z_n))$ gegen $f(p)$ konvergiert.

($\Longleftarrow$) Entgegengesetzt dazu, fordern wir nun das Folgenkriterium für Stetigkeit und folgern damit indirekt die Stetigkeit von f in p. Angenommen, f wäre in p nicht stetig. Dann existiert ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ ein $z_\delta \in D$ existiert mit $|z_\delta - p| < \delta$, aber $|f(z_\delta) - f(p)| \geq \varepsilon_0$. Wir setzen nun unser Delta $\delta := \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein $z_n \in D$ mit $|z_n - p| < \frac{1}{n}$ und $|f(z_n) - f(p)| \geq \varepsilon_0$. Da $\left(\frac{1}{n}\right)$ eine Nullfolge ist, konvergiert die Folge (z_n) gegen p. Aber die Bildfolge $(f(z_n))$ kann nicht gegen $f(p)$ konvergieren, da ihr Abstsnd zu $f(p)$ größer gleich $\varepsilon_0 > 0$ ist. Somit ist das Folgenkriterium verletzt, d.h. unsere Annahme war falsch. Also ist f in p stetig. $\square$

Wir betrachten jetzt ein Polynom mit komplexen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

$$P(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

Wir benutzen das Folgenkriterium, zum Nachweis der Stetigkeit der durch $P(z)$ definierten Funktion

$$P : \quad \mathbb{C} \ni z \quad \longmapsto \quad P(z) \in \mathbb{C}.$$

Wir wählen uns dazu eine beliebige Folge (z_k) aus $\mathbb{C}$ mit $\lim_{k\to\infty} z_k = z \in \mathbb{C}$. Nach den Grenzwertsätzen gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} P(z_k) &= \lim_{k\to\infty} \left(a_n z_k^n + a_{n-1} z_k^{n-1} + \ldots + a_1 z_k + a_0\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} a_n z_k^n \; + \lim_{k\to\infty} a_{n-1} z_k^{n-1} \; + \; \ldots \; + \lim_{k\to\infty} a_0 \\
&= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0 \\
&= P(z).
\end{aligned}$$

Außerdem können wir auch die Stetigkeit folgender Funktion erklären:

$$|P|: \quad \mathbb{C} \ni z \quad \longmapsto \quad |P(z)| \in \mathbb{R}.$$

Auch hier wählen wir uns eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ und erhalten mit Hilfe der Stetigkeit von P und der Betragsfunktion (siehe Satz 3):

$$\lim_{n\to\infty} |P(z_n)| = \left|\lim_{n\to\infty} P(z_n)\right| = \left|P\left(\lim_{n\to\infty} z_n\right)\right| = |P(z)|.$$

Für uns sind vor allem die Eigenschaften stetiger Funktionen auf kompakten Mengen interessant.

Satz 8. *Sei $K \subset \mathbb{C}$ eine kompakte Menge und $f : K \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann ist das Bild $f(K) \subset \mathbb{C}$ ebenfalls kompakt.*

Beweis: Wir benutzen das Folgenkriterium für Kompaktheit. Sei (w_n) eine beliebige Folge in $f(K)$. Dann existieren $z_n \in K$ mit $f(z_n) = w_n$. Da K kompakt ist, besitzt die Folge (z_n) eine in K konvergente Teilfolge (z_{n_k}). Sei $z = \lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k} \in K$. Da f stetig ist, konvergiert die Folge $(w_{n_k}) = \big(f(z_{n_k})\big)$ gegen $f(z) \in f(K)$. Damit haben wir eine Teilfolge von (w_n) gefunden, die in $f(K)$ konvergiert. □

Somit sind wir jetzt in der Lage, den dritten „Input“ für den Fundamentalsatzes der Algebra zu beweisen:

Satz 9 (Satz vom Minimum und Maximum)**.**
Sei $K \subset \mathbb{C}$ eine kompakte Menge und $f : K \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann nimmt f auf K ein globales Maximum und ein globales Minimum an, d.h. es existieren $\xi_1, \xi_2 \in K$, so dass

$$f(\xi_1) \leq f(z) \leq f(\xi_2) \quad \forall\, z \in K.$$

Beweis: Da K kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig ist, ist $f(K) \subset \mathbb{R}$ ebenfalls kompakt. Folglich ist $f(K)$ eine beschränkte Menge reeller Zahlen. Es existiert also das Supremum $\sup f(K)$ (kleinste obere Schranke von $f(K)$) und das Infimum $\inf f(K)$ (größte untere Schranke von $f(K)$). Da sup die *kleinste* obere Schranke und inf die *größte* untere Schranke ist, existiert eine Folge $(f(z_n))$ in $f(K)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \sup f(K)$ sowie eine Folge $(f(w_n))$ in $f(K)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} f(w_n) = \inf f(K)$. Da $f(K)$ abgeschlossen ist, liegt der Grenzwert der Folgen $(f(z_n))$ und $(f(w_n))$ in $f(K)$. Es gilt also $\sup f(K) \in f(K)$ und $\inf f(K) \in f(K)$, d.h. es gibt zwei komplexe Zahlen $\xi_1, \xi_2 \in K$, so dass $f(\xi_1) = \inf f(K)$ und $f(\xi_2) = \sup f(K)$. Demzufolge gilt

$$f(\xi_1) \leq f(z) \leq f(\xi_2) \quad \forall\, z \in K.$$

□

5. Fundamentalsatz der Algebra - ein Beweis

Mit der Dreiecksungleichung, dem Satz von Minimum und Maximum und den Wurzeln komplexer Zahlen haben wir nun alle Mittel, um den Fundamentalsatz der Algebra zu beweisen.

Wir betrachten komplexe Polynome

$$P(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

mit $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$. n bezeichnet dann den *Grad* des Polynoms.
Eine komplexe Zahl ξ heißt Nullstelle von P, wenn $P(\xi) = 0$.

Satz 10 (Fundamentalsatz der Algebra)**.**
Jedes komplexe Polynom vom Grad ≥ 1 besitzt mindestens eine komplexe Nullstelle.

Beweis: Sei $P(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ ein komplexes Polynom vom Grad $n \geq 1$ mit $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$. Da es für unseren Beweis keine Rolle spielt, durch a_n zu teilen (die Nullstellen bleiben dabei gleich), nehmen wir o.B.d.A. $a_n = 1$ an.

1. Schritt: Wir benutzen zuerst den Satz von Minimun und Maximun, um zu zeigen, dass die Abbildung $|P| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ ein globales Minimum annimmt, d.h. es existiert ein $\xi \in \mathbb{C}$ mit $|P(\xi)| \leq |P(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
Wir betrachten dazu die reelle Zahl $r := 1 + |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}| \geq 1$ und zeigen, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq r$ die Abschätzung $|P(z)| \geq r$ gilt. D.h. wir wollen beweisen, dass die Nullstellen nicht außerhalb der Kreisscheibe mit dem Radius r liegen können.
Hierfür betrachten zuerst das Polynom

$$Q(z) := a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0.$$

Dann gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq r \geq 1$ nach der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
|Q(z)| &\overset{(\triangle)}{\leq} |a_{n-1} z^{n-1}| + |a_{n-2} z^{n-2}| + \ldots + |a_1 z| + |a_0| \\
&= |a_{n-1}||z|^{n-1} + |a_{n-2}||z|^{n-2} + \ldots + |a_1||z| + |a_0| && \text{(Ausklammern von } |z|^{n-1}\text{)} \\
&= |z|^{n-1} \cdot \Big(|a_{n-1}| + \frac{|a_{n-2}|}{|z|} + \ldots + \frac{|a_1|}{|z|^{n-2}} + \frac{|a_0|}{|z|^{n-1}}\Big) && \text{(Abschätzen nach oben, da } |z| \geq 1\text{)} \\
&\leq |z|^{n-1} \cdot \Big(|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \ldots |a_1| + |a_0|\Big) && \text{(Ersetzen durch gewähltes } r\text{)} \\
&= |z|^{n-1} \cdot (r-1) && \text{(Voraussetzung: } |z| \geq r\text{)} \\
&\leq |z|^{n-1} \cdot (|z| - 1).
\end{aligned}$$

Dadurch können wir nun mithilfe der umgekehrten Dreiecksungleichung den Betrag des Bildes $|P(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq r$ nach unten abschätzen:

$$\begin{aligned}
|P(z)| = |z^n + Q(z)| &\overset{(\triangledown)}{\geq} \Big||z^n| - |Q(z)|\Big| \\
&\geq |z^n| - |Q(z)| \\
&\geq |z|^n - |z|^{n-1} \cdot (|z| - 1) && \text{(Abschätzung von } |Q(z)|\text{)} \\
&= |z|^{n-1} \\
&\geq |z| \\
&\geq r.
\end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Funktion $|P|$ auf der abgeschlossenen Kreisscheibe
$B(0,r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$. Wir haben bereits gezeigt, dass $B(0,r)$ kompakt ist und die Stetigkeit der Funktion $|P| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ nachgewiesen. Nach Satz von Minimum und Maximum nimmt $|P|$ auf $B(0,r)$ ein globales Minimum an, d.h. es existiert ein $\xi \in B(0,r)$ so dass $|P(\xi)| \leq |P(z)|$ für alle $z \in B(0,r)$.
Da $|P(0)| = |a_0| < r$, ist $|P(\xi)| < r$. Da aber $|P(z)| \geq r$ für alle $|z| \geq r$ gilt, folgt für die Zahl ξ sogar $|P(\xi)| \leq |P(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

2. Schritt: Nun muss noch gezeigt werden, dass ξ eine Nullstelle von P ist. Dies beweisen wir indirekt durch die Annahme, dass $P(\xi) \neq 0$, d.h. ξ sei keine Nullstelle von P.
Dafür betrachten wir folgendes Polynom:

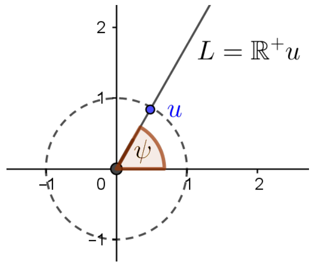
$$H(z) := \frac{P(z+\xi)}{P(\xi)} = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \ldots + b_1 z + b_0.$$

Da $|P|$ in ξ ein Minimum annimmt, gilt $|H(z)| \geq 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Wir werden diese Eigenschaft von $H(z)$ zu einem Widerspruch führen.
Da $H(0) = 1$, gilt $b_0 = 1$. Somit hat $H(z)$ die Form

$$H(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \ldots + b_m z^m + 1\,,$$

wobei m die kleinste Zahl $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $b_j \neq 0$ ist. Wir betrachten nun die komplexe Zahl $w := -\frac{|b_m|}{b_m}$.
Es gilt: $|w| = 1$.

Durch unseren Satz über die Existenz der Wurzeln komplexer Zahlen wissen wir, dass w genau m verschiedene m-te Wurzeln besitzt. Nun wählen wir uns eine dieser Wurzeln u, d.h. eine komplexe Zahl u mit $u^m = w$. Wir betrachten nun H entlang des von u erzeugten Strahls $L := \mathbb{R}^+ u$.



Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}^+$ wegen $|u| = \sqrt[n]{|w|} = 1$:

$$\begin{aligned}
|H(tu)| &\overset{\triangle}{\leq} |b_n \cdot t^n u^n| + \ldots + |b_{m+1} \cdot t^{m+1} u^{m+1}| + |b_m \cdot t^m u^m + 1| && \text{(Ersetzen von } u^m \text{ durch } w) \\
&= |b_n| \cdot t^n |u|^n + \ldots + |b_{m+1}| \cdot t^{m+1} |u|^{m+1} + |b_m \cdot t^m w + 1| && \text{(Einsetzen von } w,\ |u| = 1) \\
&= |b_n| \cdot t^n + \ldots + |b_{m+1}| \cdot t^{m+1} + \left| - b_m \cdot t^m \frac{|b_m|}{b_m} + 1 \right| \\
&= |b_n| \cdot t^n + \ldots + |b_{m+1}| \cdot t^{m+1} + |1 - t^m \cdot |b_m||.
\end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Zahlen $\rho \in \mathbb{R}^+$, die so klein sind, dass $\rho^m < \frac{1}{|b_m|}$, also $1 - \rho^m \cdot |b_m| > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|H(\rho u)| &\leq |b_n| \cdot \rho^n + \ldots + |b_{m+1}| \cdot \rho^{m+1} + 1 - \rho^m \cdot |b_m| \\
&= 1 - \rho^m \cdot \big(\underbrace{|b_m| - |b_{m+1}| \cdot \rho - \ldots - |b_n| \rho^{n-m}}_{> 0 \text{ für } \rho \text{ hinreichend klein}} \big).
\end{aligned}$$

Folglich gilt für die Elemente $\rho u \in L$ mit hinreichend kleinem ρ, dass $|H(\rho u)| < 1$ gilt. Dies ist aber ein Widerspruch zu unserer Annahme $P(\xi) \neq 0$, laut der $|H(z)| \geq 1 \; \forall\, z \in \mathbb{C}$ sein müßte. Somit war diese Annahme falsch, also gilt $P(\xi) = 0$. □

6. Schlüsse aus dem Fundamentalsatz

6.1. Linearfaktorzerlegung für komplexe Polynome

Da wir nun den Fundamentalsatz der Algebra bewiesen haben, versuchen wir jetzt weitere Schlüsse daraus zu ziehen. Ein Schluss ist die Aussage über die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms:

Satz 11 (Linearfaktorzerlegung für komplexe Polynome)**.**
Sei $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ ein komplexes Polynom vom Grad $n \geq 1$. Dann hat P genau n Nullstellen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in \mathbb{C}$ (die nicht verschieden sein müssen) und es gilt

$$P(z) = a_n \cdot (z - \xi_1) \cdot (z - \xi_2) \cdot \ldots \cdot (z - \xi_n).$$

Beweis: Nach dem Fundamentalsatz der Algebra ist bekannt, dass jedes Polynom eine Nullstelle hat, sei diese $\xi_1 \in \mathbb{C}$, also $P(\xi_1) = 0$. Wir wollen von $P(z)$ nun den Linearfaktor $(z - \xi_1)$ abspalten. Dazu definieren wir ein Polynom $Q_k(z)$, das folgende Eigenschaft besitzen soll:

$$z^k - \xi_1^k = (z - \xi_1) \cdot Q_k(z). \tag{1}$$

Ein solches $Q_k(z)$ ist gegeben durch:

$$Q_k(z) := z^{k-1} + z^{k-2} \cdot \xi_1 + z^{k-3} \cdot \xi_1^2 + \ldots + z \cdot \xi_1^{k-2} + \xi_1^{k-1}.$$

wobei $k = 2, \ldots, n$ (da wir nur Polynome mit solchem Grad betrachten).
Damit lässt sich $P(z)$ wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} P(z) &= P(z) - P(\xi_1) \\ &= a_1 \cdot (z - \xi_1) + a_2 \cdot (z^2 - \xi_1^2) + \ldots + a_n \cdot (z^n - \xi_1^n) \\ &\overset{(1)}{=} (z - \xi_1) \cdot \big(a_1 + a_2 \cdot Q_2(z) + \ldots + a_n \cdot Q_n(z)\big) \\ &=: (z - \xi_1) \cdot P_1(z). \end{aligned}$$

$P_1(z)$ ist dabei ein Polynom vom Grad $n - 1$. Wenn $n - 1 \geq 1$, so kann man den Fundamentalsatz der Algebra erneut auf $P_1(z)$ anwenden und erhält eine Nullstelle ξ_2 von P_1, wodurch man wiederum einen weiteren Linearfaktor abspalten kann, d.h.

$$P(z) = (z - \xi_1) \cdot (z - \xi_2) \cdot P_2(z),$$

wobei $P_2(z)$ ein Polynom vom Grad $n - 2$ ist. Dieses Verfahren funktioniert n–mal, womit $P(z)$ n Nullstellen hat. □

6.2. Komplexe Polynome mit reellen Koeffizienten

Satz 12. *Sei $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ ein komplexes Polynom mit reellen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Dann tritt mit jeder echt komplexen Nullstelle ξ von P auch die konjugiert-komplexe Zahl $\overline{\xi}$ als Nullstelle von P (mit der gleichen Vielfachheit) auf.*
Das Polynom $P(z)$ hat die Linearfaktorzerlegung

$$P(z) = a_n \cdot (z - \lambda_1)^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot (z - \lambda_k)^{\nu_k} \cdot (z - \xi_1)^{\mu_1} \cdot (z - \overline{\xi}_1)^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot (z - \xi_s)^{\mu_s} \cdot (z - \overline{\xi}_s)^{\mu_s},$$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die reellen Nullstellen von P mit den Vielfachheiten $\nu_1, \ldots, \nu_k$ und $\xi_1, \overline{\xi}_1, \ldots, \xi_s, \overline{\xi_s}$ die echt komplexen Nullstellen von P mit den Vielfachheiten $\mu_1, \mu_1, \ldots, \mu_s, \mu_s$ sind.
Dabei gilt $\nu_1 + \ldots + \nu_k + 2\mu_1 + \ldots + 2\mu_s = n, \ k, s \geq 0$.

Beweis: Sei $z \in \mathbb{C}$. Da die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ von $P(z)$ alle reell sind, folgt für die zu $P(z)$ konjugiert-komplexe Zahl $\overline{P(z)}$

$$\begin{aligned} \overline{P(z)} &= \overline{a_n z^n + \ldots a_1 z + a_0} \\ &= a_n \overline{z}^n + \ldots + a_1 \overline{z} + a_0 \\ &= P(\overline{z}). \end{aligned}$$

Und da $P(\xi) = \overline{P(\xi)}$ für $P(\xi) = 0$ gilt, folgt, dass eine echt-komplexe Zahl ξ genau dann Nullstelle von P ist, wenn $\overline{\xi}$ eine Nullstelle von P ist. Wir können also bei Vorliegen einer echt komplexen Nullstelle ξ immer zwei Linearfaktoren gleichzeitig abspalten:

$$P(z) = (z - \xi) \cdot (z - \overline{\xi}) \cdot P_2(z).$$

□ Aus Satz 12 folgt insbesondere, dass jedes komplexe Polynom von ungeradem Grad, dessen Koeffizienten alle reell sind, mindestens eine reelle Nullstelle besitzt.

6.3. Erster Satz von Cauchy

Satz 13 (Erster Satz von Cauchy)**.**
Sei $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ *ein komplexes Polynom vom Grad* $n \geq 1$*. Dann liegen alle Nullstellen von P(z) in der abgeschlossenen Kreisscheibe* $B(0, M) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq M\}$*, wobei* $M := 1 + \max\left\{\frac{|a_j|}{|a_n|} \;\middle|\; j = 0, \ldots, n-1\right\}$*.*

Beweis: Sei $m := \max\left\{\frac{|a_j|}{|a_n|} \;\middle|\; j = 0, \ldots, n-1\right\}$. Dann gilt für alle z mit $|z| > M$:

$$\begin{aligned}
|P(z)| &\overset{(\triangledown)}{\geq} |a_n z^n| - |a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_1 z + a_0| \\
&\geq |a_n z^n| - (|a_{n-1}z^{n-1}| + |a_{n-2}z^{n-2}| + \ldots + |a_1 z| + |a_0|) \\
&= |a_n z^n|\Big(1 - \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|}|z|^{-1} - \frac{|a_{n-2}|}{|a_n|}|z|^{-2} - \ldots - \frac{|a_1|}{|a_n|}|z|^{-(n-1)} - \frac{|a_0|}{|a_n|}|z|^{-n}\Big) \\
&\geq |a_n z^n|\Big(1 - m|z|^{-1} - m|z|^{-2} - \ldots - m|z|^{-(n-1)} - m|z|^{-n}\Big) \\
&= |a_n z^n|\left(1 - m\Big(\Big(\frac{1}{|z|}\Big)^1 + \Big(\frac{1}{|z|}\Big)^2 + \ldots + \Big(\frac{1}{|z|}\Big)^{n-1} + \Big(\frac{1}{|z|}\Big)^n\Big)\right) \\
&= |a_n z^n|\Big(1 - m\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{|z|}\Big)^k\Big).
\end{aligned}$$

Da wir nun eine geometrische Summe vorliegen haben, können wir diese durch die explizite Formel für geometrische Summen ersetzen. Allerdings muss dabei beachtet werden, dass k von 1 beginnt. Wir müssen also $1 = (\frac{1}{|z|})^0$ wieder abziehen. Wir erhalten dann:

$$\begin{aligned}
|P(z)| &\geq |a_n z^n| \cdot \left(1 - m\left(\frac{1 - (\frac{1}{|z|})^{n+1}}{1 - \frac{1}{|z|}} - 1\right)\right) \\
&\geq |a_n z^n| \cdot \left(1 - m\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{|z|}} - 1\right)\right) \qquad \left(\text{Da } \frac{1}{|z|} > 0 \text{ und somit der Term kleiner wird}\right) \\
&= |a_n z^n| \cdot \left(\frac{1 - \frac{1}{|z|} - m + m - \frac{m}{|z|}}{1 - \frac{1}{|z|}}\right) \\
&= |a_n z^n| \cdot \left(\frac{|z| - 1 - m}{|z| - 1}\right) \\
&= |a_n z^n| \cdot \left(\frac{|z| - M}{|z| - 1}\right).
\end{aligned}$$

Nun betrachten wir die einzelnen Teile des Terms und versuchen diese abzuschätzen. So ist $|a_n z^n| > 0$, da $a_n \neq 0$ und $z \neq 0$. Des Weiteren ist wegen $|z| > M \geq 1$ auch $|z| - 1 > 0$. Der letzte zu betrachtende Teil ist $|z| - M$, welcher für $|z| > M$ auch größer 0 ist. Somit erhalten wir als letzte Gleichung

$$|P(z)| > 0.$$

Damit haben wir bewiesen, dass keine Nullstellen außerhalb von $B(0, M)$ liegen können, wodurch alle Nullstellen in $B(0, M)$ liegen müssen. □

6.4. Zweiter Satz von Cauchy

Satz 14 (Zweiter Satz von Cauchy).
Sei $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ ein komplexes Polynom vom Grad $n \geq 1$ mit $a_0 \neq 0$ und $F(x)$ das reelle Polynom

$$F(x) = |a_0| + |a_1|x + \ldots + |a_{n-1}|x^{n-1} - |a_n|x^n.$$

Dann hat $F(x)$ genau eine positive reelle Nullstelle $\rho \in \mathbb{R}^+$ und alle Nullstellen des komplexen Polynoms P(z) liegen in der abgeschlossenen Kreisscheibe $B(0, \rho) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \rho\}$.

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass es genau eine positive reelle Nullstelle von $F(x)$ gibt. Dazu suchen wir generell nach positiven reellen Nullstellen und betrachten deshalb $\lim\limits_{x \to \infty} F(x)$ und $F(0)$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \infty} F(x) &= \lim_{x \to \infty} -x^n \left(|a_n| - |a_{n-1}|\frac{1}{x} - |a_{n-2}|\frac{1}{x^2} - \cdots - |a_1|\frac{1}{x^{n-1}} - |a_0|\frac{1}{x^n} \right) = -\infty, \\
F(0) &= |a_0| > 0.
\end{aligned}$$

Damit liegt nach dem Zwischenwertsatz mindestens eine Nullstelle ρ von $F(x)$ im positiven reellen Zahlenbereich. Als nächsten Schritt müssen wir zeigen, dass diese Nullstelle ρ auch die einzige positive reelle Nullstelle ist. Dazu spalten wir den Linearfaktor $(x - \rho)$ nach Satz 12 ab und versuchen, aus dem verbleibenden Term Schlüsse über die übrigen Nullstellen zu ziehen. Es gilt

$$F(x) = (x - \rho) \cdot F_1(x),$$

wobei

$$F_1(x) = c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_1 x + c_0$$

ein Polynom vom Grad $n - 1$ ist. Durch Koffizientenvergleich in den Polynomen

$$\begin{aligned}
F(x) &= |a_0| + |a_1|x + \ldots |a_{n-1}|x^{n-1} - |a_n|x^n \\
&= (x - \rho) \cdot F_1(x) \\
&= c_{n-1}x^n - \rho \cdot c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-1} - \rho \cdot c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_1 x^2 - \rho \cdot c_1 x + c_0 x - \rho \cdot c_0 \\
&= -\rho \cdot c_0 + x(c_0 - \rho \cdot c_1) + x^2(c_1 - \rho \cdot c_2) + \cdots + x^{n-1}(c_{n-2} - \rho \cdot c_{n-1}) + c_{n-1}x^n
\end{aligned}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
|a_0| &= -\rho c_0, \\
|a_1| &= c_0 - \rho c_1, \\
&\vdots \\
|a_{n-1}| &= c_{n-2} - \rho c_{n-1}, \\
-|a_n| &= c_{n-1}.
\end{aligned}$$

Da $\rho > 0$ ergibt sich aus diesen Gleichungen schrittweise $c_0 < 0, c_1 < 0, \ldots, c_{n-1} < 0$.
Da alle Koeffizienten von $F_1(x)$ negativ sind, kann $F_1(x)$ keine positiven reellen Nullstellen besitzen. Damit haben wir bewiesen, dass $F(x)$ nur die eine positive reelle Nullstelle ρ hat.
Somit bleibt zu beweisen, dass alle Nullstellen von P(z) in der Kreisscheibe $B(0, \rho)$ liegen. Dafür führen wir wieder eine Abschätzung, wie auch schon beim Fundamentalsatz und dem ersten Satz von Cauchy durch.

$$\begin{aligned}
|P(z)| &= |a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0| \\
&\geq |a_n z^n| - |a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| \\
&\geq |a_n||z|^n - (|a_{n-1}||z|^{n-1} + \cdots + |a_1||z| + |a_0|) \\
&= -F(|z|).
\end{aligned}$$

Wir haben bereits gezeigt, dass $F(|z|) < 0$ für alle $|z| > \rho$ gilt. Folglich gilt $|P(z)| > 0$ für alle $|z| > \rho$. Somit liegen alle Nullstellen des komplexen Polynoms $P(z)$ innerhalb der Kreisscheibe $B(0, \rho)$. $\square$