Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II, Institut für Mathematik
A. Filler 13.01.2018

Übungsklausur zur Vorlesung Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Bitte lösen Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt. Geben Sie auf jedem Blatt gut lesbar Ihren *Namen*, die *Matrikelnummer* und Ihre *Übungsgruppe* (Namen des Übungsleiters, Wochentag) an.

Achten Sie auf *gut nachvollziehbare Darstellungen der Lösungs- bzw. Beweisschritte*.

Für die vorliegende Übungsklausur ist eine **Bearbeitungszeit** von **60 Minuten** vorgesehen. Sie hat daher den **halben Umfang** einer regulären Klausur (mit einer Bearbeitungszeit von 120 Minuten).

1. Bestimmen Sie ein Paar reeller Zahlen λ und μ, so dass das LGS
$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ (\lambda-2)\,x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ (\mu-1)\,x_2 + (\lambda+2)\,x_3 & = & 0 \\ 3\,x_3 & = & 0 \end{array}$$
unendlich viele Lösungen besitzt. 6 Pkt.

   Sie müssen für diese Aufgabe das LGS nicht ausführlich lösen, sondern können geeignete λ und μ auch „mit scharfem Blick erkennen". Sie sollten aber begründen, dass das LGS für die von Ihnen angegebenen λ und μ tatsächlich unendlich viele Lösungen besitzt.

2. Weisen Sie nach, dass in jedem Vektorraum V über $\mathbb{R}$ für alle $\vec{u},\vec{v} \in V$ und alle $\mu \in \mathbb{R}$ gilt: Falls $\mu\cdot\vec{u} = \mu\cdot\vec{v}$ und $\mu \neq 0$, so ist $\vec{u} = \vec{v}$. 6 Pkt.

   Hinweis: Begründen Sie alle Beweisschritte unter Bezugnahme auf die Vektorraumaxiome und die Folgerungen daraus (siehe das dieser Klausur beiliegende Blatt „Vektorraumaxiome und Folgerungen").

3. Es sei $B = \left\{\vec{b}_1; \vec{b}_2; \vec{b}_3\right\}$ eine Basis eines Vektorraumes V. Zeigen Sie, dass dann auch die Vektoren $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_2 + \vec{b}_3$ und $\vec{a}_3 = \vec{b}_1 + \vec{b}_3$ eine Basis von V bilden. 14 Pkt.

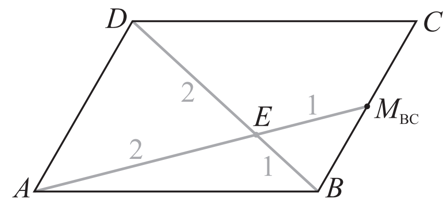
4. Gegeben sind ein Unterraum U eines Vektorraumes V und Vektoren $\vec{u},\vec{v} \in V$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? 7 Pkt.
   (i) Gehören $\vec{u}$ und $\vec{v}$ nicht zu U, so ist auch $\vec{u}+\vec{v} \notin U$.
   (ii) Gehört $\vec{u}$ zu U, nicht aber $\vec{v}$, so ist $\vec{u}+\vec{v} \notin U$.

   Geben Sie Beweise oder Gegenbeispiele an.

5. Geben Sie zu folgenden Teilmengen des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ an, ob sie lineare Unterräume sind; begründen Sie Ihre Aussagen: 7 Pkt.

   (i) $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, v_1+v_2 = v_3 \right\}$ (ii) $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, v_1\cdot v_2 = v_3 \right\}$

Zusatzaufgabe: Weisen Sie nach: In jedem Parallelogramm schneiden sich die Verbindungsstrecke eines beliebigen Eckpunktes mit dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite und die Diagonale durch die benachbarten Eckpunkte im Verhältnis 1 : 2. 10 Zusatzpkt.



Bewertung: 1,0 ab 38 Pkt.; 1,3 ab 36 Pkt.; 1,7 ab 34 Pkt.; 2,0 ab 32 Pkt.; 2,3 ab 30 Pkt.; 2,7 ab 28 Pkt.; 3,0 ab 26 Pkt.; 3,3 ab 24 Pkt.; 3,7 ab 22 Pkt., 4 ab 20 Pkt.

– Bitte dieses Blatt zusammen mit der Klausur austeilen. –

Vektorraumaxiome und Folgerungen

Definition: Eine nicht leere Menge V zusammen mit einer inneren Verknüpfung

$$+ : V \times V \to V\,, \quad (\vec{u},\vec{v}) \mapsto \vec{u}+\vec{v}$$

und einer äußeren Verknüpfung

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V\,, \quad (\lambda,\vec{u}) \mapsto \lambda \cdot \vec{u}$$

heißt *reeller Vektorraum* bzw. **Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen**, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

A1. Für beliebige $\vec{u},\vec{v} \in V$ gilt $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$ (*Kommutativität der Addition).*

A2. Für beliebige $\vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V$ gilt $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ (*Assoziativität d. Add.*).

A3. Es existiert $\vec{o} \in V$, so dass für alle $\vec{u} \in V$ gilt: $\vec{u}+\vec{o} = \vec{u}$ (*Existenz Nullvektor*).

A4. Zu jedem $\vec{u} \in V$ existiert $-\vec{u} \in V$ mit $\vec{u}+(-\vec{u}) = \vec{o}$
(*Existenz eines Gegenvektors zu jedem Vektor*).

S1. Für beliebige $\vec{u} \in V$ gilt $1\cdot\vec{u} = \vec{u}$.

S2. Für beliebige $\vec{u} \in V$ und beliebige $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ gilt $(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{u} = \lambda\cdot(\mu\cdot\vec{u})$
(*Assoziativität der Multiplikation von Vektoren mit reellen Zahlen*).

S3. Für beliebige $\vec{u},\vec{v} \in V$ und beliebige $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\cdot\vec{u}+\lambda\cdot\vec{v}$
(*1. Distributivgesetz*).

S4. Für beliebige $\vec{u} \in V$ und beliebige $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ gilt $(\lambda+\mu)\cdot\vec{u} = \lambda\cdot\vec{u}+\mu\cdot\vec{u}$
(*2. Distributivgesetz*).

Satz (Folgerungen aus den Vektorraumaxiomen):

F1. Für alle $\vec{u} \in V$ ist $0\cdot\vec{u} = \vec{o}$.

F2. Der Nullvektor $\vec{o}$ ist eindeutig bestimmt.

F3. Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\lambda\cdot\vec{o} = \vec{o}$.

F4. Für jeden Vektor $\vec{u}$ ist der Gegenvektor $-\vec{u}$ eindeutig bestimmt.

F5. Für alle $\vec{u} \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $(-\lambda)\cdot\vec{u} = -(\lambda\cdot\vec{u})$.

F6. Für alle $\vec{u} \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\lambda\cdot(-\vec{u}) = -(\lambda\cdot\vec{u})$.

F7. Für alle $\vec{u} \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: Aus $\lambda\cdot\vec{u} = \vec{o}$ folgt $\lambda = 0$ oder $\vec{u} = \vec{o}$.

Lösungen bzw. Lösungsskizzen

Hinweis: Die folgenden Lösungen bzw. Lösungsskizzen sind zum Vergleichen der Lösungen gedacht und enthalten teilweise keine Lösungswege. Sie werden hier auf den Wunsch von Studierenden hin bereitgestellt, es sei dazu aber ausdrücklich gesagt, dass es sich nur zum Teil um vollständige Musterlösungen handelt. Des Weiteren ist zu sagen, dass es natürlich für viele Aufgaben auch andere als die hier skizzierten Lösungswege geben kann.

1. $\lambda = 2$, $\mu = 1$

2. Wegen $\mu \neq 0$ existiert $\frac{1}{\mu}$. Aus der Voraussetzung $\mu\,\vec{u} = \mu\,\vec{v}$ folgt
$$\tfrac{1}{\mu} \cdot (\mu \cdot \vec{u}) = \tfrac{1}{\mu} \cdot (\mu \cdot \vec{v}),$$
was wegen VR-Axiom S2 gleichbedeutend mit
$$\left(\tfrac{1}{\mu} \cdot \mu\right) \cdot \vec{u} = \left(\tfrac{1}{\mu} \cdot \mu\right) \cdot \vec{v},$$
ist. Somit gilt wegen S1 die Behauptung $\vec{u} = \vec{v}$.

3. Lineare Unabhängigkeit:
Zu zeigen ist, dass aus $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 = \vec{o}$ bzw. $\lambda_1(\vec{b}_1+\vec{b}_2) + \lambda_2(\vec{b}_2+\vec{b}_3) + \lambda_3(\vec{b}_1+\vec{b}_3) = \vec{o}$ folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
Dazu stellt man die obere Gleichung um: $(\lambda_1+\lambda_3)\,\vec{b}_1 + (\lambda_1+\lambda_2)\,\vec{b}_2 + (\lambda_2+\lambda_3)\,\vec{b}_3 = \vec{o}$.
Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ folgt daraus $\lambda_1+\lambda_3 = 0$, $\lambda_1+\lambda_2 = 0$ und $\lambda_2+\lambda_3 = 0$; durch Lösen dieses LGS erhält man $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ sind somit linear unabhängig.
Es bleibt zu zeigen, dass $\{\vec{a}_1; \vec{a}_2; \vec{a}_3\}$ ein Erzeugendensystem ist, dass also für jeden $\vec{x} \in V$ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 = \vec{x}$ bzw. $\lambda_1(\vec{b}_1+\vec{b}_2) + \lambda_2(\vec{b}_2+\vec{b}_3) + \lambda_3(\vec{b}_1+\vec{b}_3) = \vec{x}$ existieren. Dies erfolgt analog zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit durch Umstellen der Gleichung, Nutzung der Tatsache, dass $\left\{\vec{b}_1; \vec{b}_2; \vec{b}_3\right\}$ eine Basis ist und Lösen eines LGS.
Es ist nicht unbedingt notwendig, zu zeigen, dass $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ linear unabhängig sind *und* ein Erzeugendensystem bilden. Hat man eine der beiden Tatsachen nachgewiesen, so lässt sich unter Nutzung von Sätzen über Basen recht leicht begründen, dass $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ eine Basis sein muss, z. B. lässt sich jede linear unabhängige Teilmenge von V zu einer Basis erweitern, gleichzeitig bestehen alle Basen eines VR aus gleich vielen Vektoren – somit muss $\{\vec{a}_1; \vec{a}_2; \vec{a}_3\}$, nachdem die lineare Unabhängigkeit gezeigt wurde, bereits selbst eine Basis sein.
In jedem Falle sollte eine saubere Begründung gegebenen werden (Begründungen wie „sind lin. unabh. und deshalb Basis“ sind nicht ausreichend).

4. (i) Die Aussage ist falsch.
Gegenbeispiel: Die beiden Vektoren $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ liegen nicht in dem von $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ erzeugten Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$. Ihre Summe ist jedoch der Nullvektor von $\mathbb{R}^2$, dieser gehört jedem Unterraum von $\mathbb{R}^2$ an.
(ii) Die Aussage ist richtig. Weil $\vec{u} \in U$ gilt, würde aus $\vec{u} + \vec{v} \in U$ folgen:
$$\vec{u} + \vec{v} - \vec{u} = \vec{v} \in U,$$
was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. Damit kann $\vec{u} + \vec{v} \in U$ nicht gelten.

5. U_1 ist ein UR, U_2 ist kein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.
Begründungen:
(i) Weil der Nullvektor offenbar in U_1 liegt, gilt $U_1 \neq \{\}$. Sind $\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}v_1'\\v_2'\\v_3'\end{pmatrix} \in U_1$, so gilt $v_1 + v_2 = v_3$, $v_1' + v_2' = v_3'$, und somit $(v_1 + v_1') + (v_2 + v_2') = (v_3 + v_3')$. Also ist $\begin{pmatrix}v_1+v_1'\\v_2+v_2'\\v_3+v_3'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}v_1'\\v_2'\\v_3'\end{pmatrix} \in U_1$. Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda\,v_1 + \lambda\,v_2 = \lambda v_3$, also ist

$\begin{pmatrix} \lambda\, v_1 \\ \lambda\, v_2 \\ \lambda\, v_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in U_1.$

Alternative Begründung: über Lösungsmengen homogener LGS.

(ii) Der Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Element von U_2. Aber das (-1)-Fache dieses Vektors, also $(-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ liegt nicht in U_2, sodass U_2 kein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist.

Z. Es sei E der Schnittpunkt der Verbindungsstrecke des Punktes A mit dem Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$ und der Diagonalen $\overline{BD}$. Zu zeigen ist, dass gilt:

$$\overrightarrow{BE} = \tfrac{1}{3}\,\overrightarrow{BD} \qquad \text{und} \qquad \overrightarrow{AE} = \tfrac{2}{3}\,\overrightarrow{AM_{BC}}.$$

Bekannt ist, dass $\overrightarrow{BE}$ und $\overrightarrow{BD}$ sowie $\overrightarrow{AE}$ und $\overrightarrow{AM_{BC}}$ jeweils zueinander kollinear sind, also $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ existieren mit:

$$\overrightarrow{BE} = \lambda\,\overrightarrow{BD} \qquad \text{und} \qquad \overrightarrow{AE} = \mu\,\overrightarrow{AM_{BC}}.$$

Des Weiteren gilt

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + (-1)\cdot\overrightarrow{DC} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{AM_{BC}} = \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{BC}.$$

Da das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist, gilt $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ und somit $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + (-1)\cdot\overrightarrow{AB}$. Daher ergibt sich

$$\overrightarrow{BE} = \lambda\,\overrightarrow{BC} - \lambda\,\overrightarrow{AB} \qquad \text{und} \qquad \overrightarrow{AE} = \mu\,\overrightarrow{AB} + \tfrac{\mu}{2}\,\overrightarrow{BC}.$$

Unter Verwendung der Beziehung $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}$ ergibt sich daraus

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + (-1)\cdot\overrightarrow{BE} = \mu\,\overrightarrow{AB} + \tfrac{\mu}{2}\,\overrightarrow{BC} - \lambda\,\overrightarrow{BC} + \lambda\,\overrightarrow{AB}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} - \mu\,\overrightarrow{AB} - \tfrac{\mu}{2}\,\overrightarrow{BC} + \lambda\,\overrightarrow{BC} - \lambda\,\overrightarrow{AB} &= \vec{o} \\ (1-\mu-\lambda)\;\overrightarrow{AB} + \left(-\tfrac{\mu}{2}+\lambda\right)\;\overrightarrow{BC} &= \vec{o}. \end{aligned}$$

Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ sind, da sie ein Parallelogramm aufspannen, nicht kollinear. Deshalb kann der Nullvektor nur auf triviale Weise als Linearkombination dieser Vektoren entstehen, es muss also gelten:

$$\begin{aligned} 1 - \mu - \lambda &= 0 \\ -\tfrac{\mu}{2} + \lambda &= 0\,. \end{aligned}$$

Durch Lösen dieses LGS ergibt sich $\lambda = \frac{1}{3}$, $\mu = \frac{2}{3}$, also
$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AM_{BC}}$ und somit die Behauptung.

Alternative Aufgaben

6. Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ hat die folgende Matrix den Rang 2? 15 Pkt.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 3 & -1 \\ 3 & 6 & -2 \\ -1 & -3 & \lambda \end{pmatrix}$$

Lösung: $\mathrm{rg}(A) = 2$ für $\lambda = 1$ und $\lambda = \frac{3}{2}$, ansonsten $\mathrm{rg}(A) = 3$.

7. Geben Sie ein Beispiel für zwei Unterräume U_1 und U_2 eines Vektorraumes V an, deren Vereinigungsmenge $U_1 \cup U_2$ kein Unterraum ist (mit Begründung). 6 Pkt.

Lösung: Wir betrachten z. B. zwei Unterräume von $\mathbb{R}^2$, etwa:

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R} \right\}, \; U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R} \right\}$$

$U_1 \cup U_2$ enthält somit die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, nicht aber deren Summe $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, was im Widerspruch zu der Eigenschaft U1 des Unterraumkriteriums steht.

8. Zeigen Sie, dass die Vektormenge $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ ist. 10 Pkt.

Lösung: E ist ein ES von $\mathbb{R}^3$, wenn sich jeder Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ als Linearkombination der drei Vektoren von E darstellen lässt, also $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ existieren mit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dies ist gleichbedeutend mit der Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcl} \lambda + \mu + \nu &=& x \\ \mu + \nu &=& y \\ \nu &=& z\,. \end{array}$$

Dieses LGS ist für beliebige x, y, z lösbar, die (eindeutige) Lösung ist
$\lambda = x - y$, $\mu = y - z$, $\nu = z$.