Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
A. Filler

Wintersemester 2017/18

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Übungsserie 1

Abgabe am 30.10.2017

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:
- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem extra Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Mo./Di./Mi.).
- Sie sollten die Lösungen in **Gruppen, bestehend aus (in der Regel) drei, maximal vier Studierenden**, abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.

Die **vorliegende Serie** enthält eine erhöhte Zahl von Aufgaben und wird mit **150%** der Punkte der sonstigen Übungsserien bewertet (30 statt 20 Punkte). Für Ihre Bearbeitung sind 12 Tage (anstatt einer Woche) vorgesehen.

1.1 (a) A, B und C seien Aussagen. Beweisen Sie, dass die folgende Aussage ein logisches Gesetz ist: $(A \wedge (B \vee C)) \quad \Leftrightarrow \quad ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$ 2 Pkt.

(b) Gegeben sind die Aussagen 6 Pkt.

A: „Peter fährt nach Leipzig.“
B: „Peter nimmt den Bus.“
C: „Peter nimmt die Bahn.“

(i) Drücken Sie die Aussage
D: „Falls Peter nach Leipzig fährt, nimmt er entweder den Bus oder die Bahn“
als logische Verknüpfung der Aussagen A, B und C aus.

(ii) Drücken Sie die Negation $\neg D$ der Aussage D als eine logische Verknüpfung der Aussagen A, B, C aus, in der nur die logischen Symbole $\wedge, \vee, \neg$ und Klammern vorkommen. Vereinfachen Sie den Ausdruck so weit wie möglich.

(iii) Für welche Wahrheitswertbelegungen von A, B und C ist $\neg D$ wahr? Beschreiben Sie die möglichen Fälle sprachlich.

1.2 (a) Beschreiben Sie die folgenden Mengen durch Aufzählung ihrer Elemente, d. h. in der Form $M = \{a, b, c, ...\}$, und geben Sie an, welche der Mengen identisch sind: 2 Pkt.

$M_1 = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x + 2 = 0\}$
$M_2 = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x + 2 = 0\}$
$M_3 = \left\{x \mid x \in \mathbb{Q} \wedge x^2 - 2 = 0\right\}$
$M_4 = \left\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - 2 = 0\right\}$
$M_5 = \left\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x^2 + 2 = 0\right\}$

(b) Stellen Sie die Teilmengenbeziehungen zwischen den folgenden Arten von Vierecken in einem einzigen Venn-Diagramm dar: 3 Pkt.

V – Menge aller Vierecke
T – Menge aller Trapeze
D – Menge aller Drachenvierecke
P – Menge aller Parallelogramme
Ra – Menge aller Rauten (Rhomben)
Re – Menge aller Rechtecke
Q – Menge aller Quadrate

Achten Sie auf die Überschneidungen zwischen den einzelnen Mengen, um das Venn-Diagramm korrekt zu zeichnen. Beachten Sie dazu z. B., dass jedes Viereck, bei dem es sich zugleich um ein Drachenviereck und um ein Trapez handelt, eine Raute sein muss.

(c) Es sei n eine beliebige natürliche Zahl und T_n die Menge aller Teiler von n sowie V_n die Menge aller Vielfachen von n.

(i) Welche Teilmengenbeziehungen bestehen zwischen T_5, T_{10}, T_{15} und T_{60}? 1 Pkt.

(ii) Welche Teilmengenbeziehungen bestehen zwischen V_5, V_{10}, V_{15} und V_{60}? 1 Pkt.

(iii) Beweisen Sie: Ist a ein Teiler von b, so gilt $V_b \subseteq V_a$. 3 Pkt.

Hinweis: $a \in \mathbb{N}$ ist genau dann ein Teiler von $b \in \mathbb{N}$, wenn ein $k \in \mathbb{N}$ mit $b = k \cdot a$ existiert.
$a \in \mathbb{N}$ ist genau dann ein Vielfaches von $b \in \mathbb{N}$, wenn ein $k \in \mathbb{N}$ mit $a = k \cdot b$ existiert.

1.3 (a) Beschreiben Sie den Einheitskreis in Mittelpunktslage (Kreis mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung und dem Radius 1), indem Sie ihn als Punktmenge in der Form

$$k_1 = \{\, P(x;y) \mid \ ??? \ \}.$$

angeben. Verwenden Sie dazu den Satz des Pythagoras. 1 Pkt.

(b) Beschreiben Sie den Einheitskreis in Mittelpunktslage als Punktmenge mithilfe der Sinus- und Kosinusfunktion, indem Sie ihn als Punktmenge in der Form 1 Pkt.

$$k_2 = \{\, P(x;y) \mid \ x = ??? \wedge y = ???\,;\ \alpha \in ???\}.$$

angeben.

Hinweis: Falls Ihnen nicht sofort eine Lösung einfällt, so rekapitulieren Sie (z. B. mithilfe eines Schulbuches der 10. Jahrgangsstufe), wie Sinus und Kosinus am Einheitskreis eingeführt werden.

(c) Beweisen Sie, dass die von Ihnen in den Aufgabenteilen a) und b) beschriebenen Mengen k_1 und k_2 tatsächlich identisch sind. 7 Pkt.

Beachten Sie: Es ist zu zeigen, dass jedes Element (d. h. jeder Punkt) von k_1 auch zu k_2 gehört *und* umgekehrt jedes Element von k_2 auch zu k_1 gehört.

1.4 Weisen Sie (mithilfe der Transitivität und der Antisymmetrie der Teilmengenbeziehung) nach:

Sind A, B, C drei beliebige Mengen und gilt $A \subseteq B \subseteq C \subseteq A$, so sind A, B und C identisch ($A = B = C$). 3 Pkt.

Freiwillige Aufgaben zur Wiederholung von Schulwissen

Die folgenden Aufgaben sollen Ihnen helfen, Ihr mathematisches Schulwissen zu überprüfen. Sie beziehen sich auf Grundwissen, das für ein Studium unbedingt vorausgesetzt werden muss. Für die Lösung der drei unten angegebenen Aufgaben sollten Sie nur wenige Minuten benötigen.

Die Aufgaben wurden dem WiMINT-Eignungstest für die Klassenstufe 10, basierend auf dem Mindestanforderungskatalog Mathematik (Version 2.0) der cosh-Arbeitsgruppe entnommen.

Diese Aufgaben werden nicht korrigiert und auch nicht in die Bewertung einbezogen. Lösungen bzw. Lösungshinweise werden aber jeweils auf den Übungsblättern (eine Woche nachdem die Aufgaben hier gestellt werden) veröffentlicht.

Z1. Ist die folgende Aussage richtig? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Wenn Rechtecke flächengleich sind, dann sind sie auch kongruent.

Z2. Zu Beginn jeden Jahres werden auf ein Sparbuch 100 Euro eingezahlt. Das Guthaben wird zusätzlich während der gesamten Zeit mit 10% p.a. (jährlich) verzinst und die Zinsen werden jährlich am Jahresende gutgeschrieben.
Welcher Wert kommt dem Guthaben am Ende des zweiten Jahres am nächsten? (Schätzung, kein genauer Wert)

- ☐ 120 Euro
- ☐ 200 Euro
- ☐ 220 Euro
- ☐ 230 Euro

Z3. Begründen Sie, dass $\left(\frac{99}{41}\right)^2$ zwischen 4 und 9 liegt.

Z4. Ist in den folgenden Aufgaben richtig gekürzt worden?

Korrigieren Sie die falschen Aufgaben und geben Sie bei jeder Aufgabe das Ergebnis als vollständig gekürzten Bruch an.

a) $\dfrac{3}{\cancelto{4}{8}} \cdot \dfrac{\cancelto{1}{2}}{5} = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{5}$

b) $\dfrac{3}{\cancelto{4}{8}} - \dfrac{\cancelto{1}{2}}{5} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{5}$

c) $\dfrac{1 + 2\cancelto{1}{a}}{3\cancelto{1}{a}} = \dfrac{1+2}{3} = 1$

d) $\dfrac{\cancelto{3}{15}}{7} \cdot \dfrac{\cancelto{2}{10}}{11} = \dfrac{3}{7} \cdot \dfrac{2}{11}$

e) $\dfrac{3}{\cancelto{4}{8}} : \dfrac{\cancelto{1}{2}}{5} = \dfrac{3}{4} : \dfrac{1}{5}$

f) $\dfrac{3}{\cancelto{1}{2a}} \cdot \dfrac{\cancelto{a}{3a}}{2} = \dfrac{3}{1} \cdot \dfrac{a}{2}$