Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
A. Filler

Wintersemester 2017/18

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Übungsserie 2

Abgabe am 06.11.2017

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:
- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Mo./Di./Mi.).
- Sie sollten die Lösungen in **Gruppen, bestehend aus (in der Regel) drei, maximal vier Studierenden**, abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.
- Achten Sie auf **gut nachvollziehbare Darstellungen der Lösungs- bzw. Beweisschritte**.

2.1 (a) Entscheiden Sie für die folgenden Relationen, ob es sich um reflexive, irreflexive, symmetrische, asymmetrische, antisymmetrische sowie transitive Relationen handelt:

(a) Teilbarkeit in $\mathbb{N}$
(b) Gleichheit in $\mathbb{R}$
(c) Ungleichheit in $\mathbb{R}$
(d) Kleinerrelation in $\mathbb{R}$
(e) Größer-Gleich-Relation in $\mathbb{R}$

Geben Sie Ihre Antworten in Tabellenform an (siehe unten),
Begründungen werden bei dieser Aufgabe nicht verlangt. 5 Pkt.

Relation	reflexiv	irreflexiv	symmetrisch	asymmetrisch	antisymmetr.	transitiv
...						

(b) Beweisen Sie, dass die durch $(a;b) \sim (c;d) :\Leftrightarrow a\cdot d = c\cdot b$ definierte Relation (Quotientengleichheit) eine Äquivalenzrelation in der Menge $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ der Paare $(a;b)$ ganzer Zahlen (mit $b \neq 0$) ist. 6 Pkt.

2.2 Die in der obigen Aufgabe festgelegte Äquivalenzrelation $\sim$ zerlegt die Menge $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ in Äquivalenzklassen $\overline{(a;b)} = \{(m;n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{0\} \mid (m;n) \sim (a;b)\}$. Für diese Äquivalenzklassen wird eine Addition $\oplus$ folgendermaßen definiert:

$$\overline{(a;b)} \oplus \overline{(c;d)} = \overline{(a\cdot d+c\cdot b\,;\,b\cdot d)}$$

(Dabei sind $+$ und $\cdot$ die übliche Addition und Multiplikation ganzer Zahlen.)

Weisen Sie nach, dass die so definierte Addition $\oplus$ repräsentantenunabhängig ist, dass also für $(a_1;b_1) \sim (a_2;b_2)$ und $(c_1;d_1) \sim (c_2;d_2)$ gilt: $(a_1\cdot d_1+c_1\cdot b_1\,;\,b_1\cdot d_1) \sim (a_2\cdot d_2+c_2\cdot b_2\,;\,b_2\cdot d_2)$.

Hinweise: 5 Pkt.
- Falls Sie zunächst keinen Zugang zu der Aufgabe finden, rechnen Sie auf einem Schmierzettel Beispiele mit konkreten Zahlen und denken Sie über die Bruchrechnung nach.
- Beachten Sie, dass hier davon ausgegangen wird, dass *nur ganze Zahlen* zur Verfügung stehen und daher $a : b$ oder $\frac{a}{b}$ im Allgemeinen nicht definiert ist, also auch nicht verwendet werden darf.

2.3 Die folgende Behauptung ist falsch – auch wenn für sie ein „Beweis“ gegeben wird. Geben Sie ein Gegenbeispiel zur Behauptung an, und finden Sie die Stelle im Beweis, an der ein unzulässiger Schluss gemacht wird. 4 Pkt.

Behauptung:
Wenn eine Relation symmetrisch und transitiv ist, ist sie auch reflexiv, also eine Äquivalenzrelation.

„Beweis“:
Sei $\sim$ eine symmetrische und transitive Relation auf einer Menge X. Sei $x \in X$ beliebig, und sei $x \sim y$. Wegen der Symmetrie ist dann auch $y \sim x$ und aufgrund der Transitivität folgt dann auch $x \sim x$. Also ist $\sim$ reflexiv.

Freiwillige Aufgaben zur Wiederholung von Schulwissen

Die folgenden Aufgaben sollen Ihnen helfen, Ihr mathematisches Schulwissen zu überprüfen. Sie beziehen sich auf Grundwissen, das für ein Studium unbedingt vorausgesetzt werden muss. Für die Lösung der drei unten angegebenen Aufgaben sollten Sie nur wenige Minuten benötigen. Die Aufgaben wurden dem WiMINT-Eignungstest für die Klassenstufe 10, basierend auf dem Mindestanforderungskatalog Mathematik (Version 2.0) der cosh-Arbeitsgruppe entnommen. Diese Aufgaben werden nicht korrigiert und auch nicht in die Bewertung einbezogen. Lösungen bzw. Lösungshinweise werden aber jeweils auf den Übungsblättern (eine Woche nachdem die Aufgaben hier gestellt werden) veröffentlicht.

Z 2.1. Nennen Sie zwei verschiedene Brüche, die zwischen $\frac{3}{4}$ und $\frac{7}{8}$ liegen. Schreiben Sie Ihre Überlegungen dazu auf.

Z 2.2. Vereinfachen Sie soweit wie möglich. Notieren Sie auch die Zwischenschritte.

$(x+1) \cdot (x-1) - (2x-1) \cdot (1-x) =$

Z 2.3. Es soll eine ganzrationale Funktion f mit möglichst kleinem Grad bestimmt werden, deren Nullstellen $x_1 = -3$, $x_2 = -1$ und $x_3 = 2$ sind und deren Graph durch den Punkt $(0; 3)$ verläuft.

Schreiben Sie einen Ansatz auf, der alle Forderungen berücksichtigt. Sie müssen NUR den Ansatz aufschreiben und NICHT die Funktion bestimmen.

Z 2.4. An der Tafel steht folgende Termumformung:

$$\frac{x^2+2x}{x+2} = \boxed{} = x \quad \text{für } x \neq -2.$$

Eine Schülerin meldet sich und sagt: „Das kann doch nicht gleich x sein. Der Bruch kann ja nicht einfach verschwinden.“

Schreiben Sie die Zwischenschritte der Umformung auf.

Lösungen der freiwilligen Zusatzaufgaben aus Übungsserie 1

Z1. Die Aussage ist falsch.

Gegenbeispiel: Rechteck A mit Seitenlängen 4 cm und 1 cm und Rechteck B mit Seitenlängen 2 cm und 2 cm sind flächengleich aber nicht kongruent.

Z2. 230 Euro sind annähernd richtig, die genaue Lösung ist 231 Euro $(100 \cdot 1,1^2 + 100 \cdot 1,1)$.

Z3.

$$\begin{array}{lccccl} \text{z.z.} & 4 & < & \left(\frac{99}{41}\right)^2 & < 9 & \\ \iff & 2 & < & \frac{99}{41} & < 3 & \text{alle Zahlen sind positiv} \\ \iff & 82 & < & 99 & < 123 & \text{wahre Aussage} \end{array}$$

Z4. a) $\frac{3}{\cancel{8}^{4}} \cdot \frac{\cancel{2}^{1}}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$

b) $\frac{3}{\cancel{8}^{4}} - \frac{\cancel{2}^{1}}{5} = \frac{3}{4} - \frac{1}{5}$ $\rightarrow$ falsch, richtig ist $\frac{3}{8} - \frac{2}{5} = \frac{15}{40} - \frac{16}{40} = -\frac{1}{40}$

c) $\frac{1+2\cancel{a}^{1}}{3\cancel{a}^{1}} = \frac{1+2}{3} = 1$ $\rightarrow$ falsch, $\frac{1+2a}{3a}$ lässt sich nicht weiter vereinfachen

d) $\frac{\cancel{15}^{3}}{7} \cdot \frac{\cancel{10}^{2}}{11} = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{11}$ $\rightarrow$ falsch, richtig ist $\frac{15}{7} \cdot \frac{10}{11} = \frac{150}{77}$

e) $\frac{3}{\cancel{8}^{4}} : \frac{\cancel{2}^{1}}{5} = \frac{3}{4} : \frac{1}{5}$ $\rightarrow$ falsch, richtig ist $\frac{3}{8} : \frac{2}{5} = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{16}$

f) $\frac{3}{\cancel{2a}^{1}} \cdot \frac{\cancel{3a}^{a}}{2} = \frac{3}{1} \cdot \frac{a}{2}$ $\rightarrow$ falsch, richtig ist $\frac{3}{2a} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$